

Alıştırmalar I

G her zaman bir grubu göstermektedir.

1. 2, 3, 4 elemanlı olası tüm grup tablolarını yapın.
2. H ve K , G 'nin altgrubu olsun. Doğru mu, yanlış mı? $H \cup K$ kümesinin G 'de altgrup olması için gerek ve yeter şart $H \subseteq K$ veya $K \subseteq H$ olmasıdır.
3. Doğru mu yanlış mı? Sonsuz bir grubun sonsuz tane farklı altgrubu vardır.
4. Karede, a dikey eksene, b yatay eksene, c ise köşegenlerden birine göre yansımayı gösterin.
 - (a) Karenin simetri grubunun a ve c tarafından üretildiğini gösterin.
 - (b) Karenin simetri grubunda a ve b 'nin ürettiği altgrubu bulun.
5. Düzgün n -gonun simetrisi grubundaki $2\pi/n$ radyanlık saat yönündeki döndürmeyi ρ ile gösterelim; a herhangi bir yansıma olsun. Bu gruptaki her elemanın uygun bir $0 \leq i \leq n-1$ sayısı için ρ^i veya $\rho^i a$ biçiminde yazılabildiğini gösterin. (Dolayısı ile D_n grubunun en küçük döndürme ve herhangi bir yansıma tarafından üretildiğini göstermiş olacağız.) Sembollerle yazarsak, $D_n = \langle \rho, a \rangle = \{\text{id}, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}, a, \rho a, \dots, \rho^{n-1} a\}$.
6. İstenen koşulu bulup, cümlelerin tamamını kanıtlayın: Herhangi bir $n \geq 3$ için r ve s , D_n grubunda iki farklı yansıma olsun. $D_n = \langle r, s \rangle$ olması için gerek ve yeter koşul
7. Eğer her $g \in G$ için $g^2 = 1$ ise G 'nin abelyan olduğunu kanıtlayın.
8. $x^2 = g$ eşitliğinin x için çözümünün olmadığı bir G grubu ve $g \in G$ elemanı örneği verin. (Dikkat: Toplamsal olarak düşünmek isterseniz, denklem $x + x = 2x = g$ olur.)
9. G sonlu bir grup olsun, eğer her $g \in G$ için $x^2 = g$ eşitliğinin x için en az bir çözümü varsa, çözümün tek olduğunu kanıtlayın.
10. Derecesi 2 olan eleman içeren ve içermeyen grup örnekleri verin.
11. Eğer $|G|$ çiftse, G 'de derecesi 2 olan en az bir elemanın bulunduğunu kanıtlayın.
12. Aşağıdaki grup elemanlarının verilen gruplardaki derecelerini bulun.
 - (a) Toplama işlemine göre; $-1, 3/5, \pi, i \in \mathbb{C}$, $64 \in \mathbb{Z}_{1000}$.
 - (b) Çarpma işlemine göre; $-1, 3/5, \pi, i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $3 \in \mathbb{Z}_7^*$, $3 \in \mathbb{Z}_{10}^*$.
 - (c) Bileşmeye göre; \mathbb{R}^2 'de $(0, 0)$ noktası etrafında saat yönünde 1 radyanlık döndürme, $64\pi/1000$ radyanlık döndürme, \mathbb{R}^2 'de $(1, -1)$ vektörü ile öteleme.