MAT216: Geometri ve Cebir 20 Mart 2020
Hazırlayan: Ayşe Berkman

Alıştırmalar II

1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 2 & 10 & 7 & 3 & 9 & 1 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix} \in S_{10}$ olsun.
   (a) σ permütasyonunu ayrık döngülerin çarpımı olarak yazın.
   (b) σ'yı makasların çarpımı olarak yazın.
   (c) σ^{-1} nedir?
   (d) σ^2'yi ve σ^5'i hesaplayın.
   (e) σ'nın derecesinin 6 olduğunu kanıtlayın.

2. (a) Aşağıdaki permütasyonların S_9 grubundaki derecelerini hesaplayın.
   $(1,2,3)(4,5)$, $(5,7,4)(3,1,8,9)(2,6)$, $(1,2,3,4,5,6,7,8,9)^{-1}$
   (b) Eğer $\sigma = (1,2,\ldots,k)(k+1,k+2,\ldots,k+m)$ ise $o(\sigma) = \mathrm{ekok}(k,m)$ olduğunu kanıtlayın.

3. Hangi pozitif sayılar S_4 ve S_5 gruplarındaki bir elemanın derecesidir?

4. $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ biçimindeki permütasyonlara k-lı döngü denir. Doğru mu, yanlış mı?
   (a) Her k-lı döngünün derecesi k olur.
   (b) Her k-lı döngünün tersi de bir k-lı döngüdür.
   (c) Her k-lı döngünün karesi de bir k-lı döngüdür.

5. Her $n \geqslant 2$ için, $S_n = \langle (1,2), (1,3), \ldots, (1,n) \rangle$ olduğunu kanıtlayın. (İpucu: $(i,j) = (1,i)(1,j)(1,i)$.)

6. Her $n \geqslant 2$ için, $S_n = \langle (1,2), (2,3), \ldots, (n-1,n) \rangle$ olduğunu kanıtlayın. (İpucu: $(1,k) = (k,k-1)(k-1,k-2)\cdots(3,2)(2,1)(3,2)\cdots(k,k-1)$.)

7. Her $n \geqslant 2$ için, $S_n = \langle (1,2), (1,2,\ldots,n) \rangle$ olduğunu kanıtlayın.

8. Her $n \geqslant 3$ için, A_n grubunun üçlüler tarafından üretildiğini kanıtlayın. (İpucu: Yukarıdaki 5. soruyu ve $(1m)(1n) = (1nm)$ eşitliğini kullanın.)

9. Her $n \geqslant 2$ için $H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\}$ kümesinin S_n'in altgrubu olduğunu kanıtlayın.

10. (a) Bir eşkenar üçgenin köşelerini 1, 2, 3 olarak numaralandırdıktan sonra üçgenin simetrilerini $\{1,2,3\}$ kümesinin permütasyonları olarak görebiliriz. Burdan da $D_3 = S_3$ diyebiliriz. (Buna daha sonra izomorfik diyeceğiz.)
    (b) Benzer şekilde, her $n \geqslant 4$ için D_n grubunun tüm elemanlarını permütasyon olarak yazın ve $D_n \leqslant S_n$ olarak görülebileceğini kanıtlayın.