3 Gruplarla İlgili Yeni Kavramlar

3A Grup Elemanlarının Dereceleri

Bu bölümde G bir grup, e grubun etkisiz elemanı ve $g \in G$ olsun.

Notasyon. Her $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ için; $g^n = \underbrace{g \cdots g}_{n \text{ adet}}$, $g^0 = e$, $g^{-n} = (g^{-1})^n$ gösterimleri kullanılır.

Yukarıdaki $g^0 = e$ ifadesi bazı öğrencileri rahatsız edebilir, ancak g^n'in tanımına eşdeğer olan alternatif $g^n = e\underbrace{g \cdots g}_{n \text{ adet}}$ tanımı kullanırsak, o zaman $g^0 = e$ bu alternatif tanımın doğal bir sonucu olur.

Gözlem. Her $m, n \in \mathbb{Z}$ için, $g^m g^n = g^{m+n}$ ve $g^{-n} = \underbrace{g^{-1} \cdots g^{-1}}_{n \text{ adet}} = (g^n)^{-1}$ sağlanır.

Tanım. Eğer $g^n = e$ eşitliğini sağlayan bir $n > 0$ varsa bu eşitliği sağlayan pozitif sayıların en küçüğüne g'nin *derecesi* (veya *mertebesi*) denir ve bu sayı $o(g)$ ile gösterilir. (İngilizce *order* sözcüğünün baş harfi kullanılır.) Eğer $g^n = e$ hiçbir $n > 0$ için sağlanmıyorsa, g'nin derecesi sonsuzdur deriz ve $o(g) = \infty$ yazarız.

Örnekler. 1. $(\mathbb{Z}, +)$ grubunda, $o(1) = \infty$ olur çünkü 1'i kendisi ile kaç defa toplarsak toplayalım 0 sayısını elde edemeyiz. Aslında $(\mathbb{Z}, +)$ grubunda 0 hariç tüm elemanların derecesi sonsuzdur. 0 etkisiz eleman olduğu için derecesi 1'dir.

2. Herhangi bir grupta derecesi 1 olan tek elemanın etkisiz eleman olduğunu kanıtlayın.

3. $(\mathbb{Z}_n, +)$ grubunda, 1'in derecesi n'dir; ancak 2'nin derecesi n'ye bağlıdır. Tek n değerleri için $o(2) = n$ ve çift n değerleri için $o(2) = n/2$ olduğunu kanıtlayın.

4. D_3 grubundaki id'den farklı iki döndürme olduğunu hatırlayın. Bunlar $2\pi/3$ ve $4\pi/3$ radyanlık döndürmeler olduğu için dereceleri 3'tür. D_n grubundaki $2\pi/n$ radyanlık döndürmenin derecesi n'dir; $4\pi/n$ radyanlık döndürmenin derecesi kaçtır?

5. Hangi grupta olursa olsun, 180 derecelik döndürmelerin ve yansımaların dereceleri 2'dir; id hariç ötelemelerin dereceleri sonsuzdur.

6. $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$ grubunun elemanlarının derecelerini bulalım. Etkisiz eleman olan 1'in derecesi elbette 1'dir. $2 \cdot 2 = 4 \neq 1$, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 3 \neq 1$ ve $2^4 = 3 \cdot 2 = 1$ olduğu için 2'nin derecesi 4'tür. Benzer şekilde, $o(3) = 4$ ve $o(4) = 2$ olduğunu gösterin.

Alıştırma 1. Her biri 4 elemanlı olan $\mathrm{Sym}(\square)$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5^*$ ve $\mathbb{Z}_8^*$ gruplarının elemanlarının derecelerini karşılaştırın.

Alıştırma 2. Her $g \in G$ için, $o(g) = o(g^{-1})$ olduğunu kanıtlayın.

Alıştırma 3. G grubunda derecesi n olan bir eleman varsa, n'nin her pozitif m böleni için G'de derecesi m olan bir eleman olduğunu kanıtlayın.

Lemma 3.1. *Her $a \in G$ için $|\langle a\rangle| = o(a)$ sağlanır.*

Kanıt. G grubundaki her a elemanı için $\langle a\rangle$ ile G'de a'yı içeren en küçük altgrubu gösterdiğimizi hatırlayın. $\langle a\rangle$ altgrubu a'nın bütün kuvvetlerini içermek zorunda olduğu için $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \langle a\rangle$ olduğu kolayca görülür. Soldaki kümenin hem altgrup olduğunu hem de a'yı içerdiğini kontrol ediniz, böyle bir küme en küçük altgruptan daha küçük olamayacağına göre $\langle a\rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ yazabiliriz. Eğer a'nın derecesi sonsuzsa $m \neq n$ için $a^m \neq a^n$ olur, yani $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ kümesi sonsuzdur. Eğer $o(a) = m$ sonlu ise $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{e, a, a^2, \ldots, a^{m-1}\}$ olur ve istenen sonuç elde edilir. $\square$

Dikkat. Herhangi bir $n > 0$ için $g^n = e$ bulunca $o(g) = n$ sonucuna varmak lisans öğrencilerinin sıklıkla yaptığı bir hatadır. Örneğin; $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$ grubunda $2^8 = 1$'dir ancak 2'nin derecesi 8 değil, 4'tür. Eşit olmasalar bile $g^n = e$ eşitliğini sağlayan n sayıları ile $o(g)$ arasında bir ilişki vardır. Şimdi onu kanıtlayalım.

Önerme 3.2. *Eğer bir grupta herhangi bir $g \in G$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için $g^n = e$ sağlanıyorsa, $o(g) \mid n$ doğrudur.*

Kanıt. Bölme algoritmasından $n = o(g)q + r$ ve $0 \leqslant r < o(g)$ cümlelerini sağlayan q ve r tam sayılarının olduğunu biliyoruz. Buradan $e = g^n = g^{o(g)q+r} = (g^{o(g)})^q g^r = e^q g^r = g^r$ elde ederiz. Derecenin tanımından dolayı $g^r = e$ ve $0 \leqslant r < o(g)$ ancak $r = 0$ durumunda doğru olabilir. (Bunu anladığınızdan emin olun.) Dolayısı ile $n = o(g)q$ olur yani $o(g) \mid n$ sağlanır. $\square$

Alıştırma 4. G abelyan bir grup, $g, h \in G$ olsun. Eğer $\langle g\rangle \cap \langle h\rangle = \{e\}$ ise o zaman $o(gh) = \text{ekok}(o(g), o(h))$ olduğunu kanıtlayın. (İpucu: Önerme 3.2'yi kullanın.)

Alıştırma 5. En az 3 elemanı olan ve etkisiz eleman dışındaki tüm elemanlarının derecesi 2 olan bir grup var mıdır? (Not: $(\mathbb{Z}_2, +)$, $(\{\text{id}, r\}, \circ)$ ve diğer tüm 2 elemanlı gruplar bu koşulu açıkça sağladığı için soruya en az 3 elemana sahip olma koşulu konulmuştur.)

3B Grupların Direk Çarpımları

A ve B iki küme ise $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ kümesine A ve B'nin *direk çarpımı* veya (Descartes'tan dolayı) *kartezyen çarpımı* denir. Eğer A ve B sonlu kümelerse o zaman $A \times B$ de sonlu bir küme olur ve eleman sayısı $|A \times B| = |A||B|$ olarak bulunur.

Şimdi verilen iki grubun direk çarpımları üzerinde bu kümeyi grup yapacak doğal bir işlem tanımlayacağız.

Tanım. $(G, *)$ ve $(H, \diamond)$ iki grup olsun, her $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$ eleman çifti için,

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \diamond h_2) \in G \times H$$

işlemini tanımlayalım.

Teorem 3.3. *Yukarıda tanımlanan işleme göre iki grubun direk çarpımı da grup olur.*

Kanıt. İşlemin kapalı olduğunu tanımda gözlemlemiştik. G'nin etkisiz elemanını e_G ile, H'nin etkisiz elemanını ise e_H ile gösterirsek (e_G, e_H) ikilisinin etkisiz eleman olduğu $(g,h)(e_G,e_H) = (g * e_G, h \diamond e_H) = (g,h)$ ve benzeri olan $(e_G,e_H)(g,h) = (g,h)$ eşitlikleri sayesinde kanıtlanır. Terslerin bulunduğunu $(g,h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1}) \in G \times H$ eşitliğini kanıtlayarak kontrol ediniz. Birleşme özelliğinin kanıtı okuyucuya bırakılmıştır. □

Sonuç 3.4. *Her* $1 \leqslant i \leqslant k$ *için* G_i *grupsa* $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$ *de (yukarıdaki gibi) girdi girdi çarpma işlemine göre grup olur.*

Kanıt. $k \geqslant 2$ üzerinden tümevarım yapınız. □

Örnekler. Hiçbir kısıtlama olmadan istediğiniz herhangi iki (veya daha fazla) grubun direk çarpımını alabilir ve yeni grup örnekleri elde edebilirsiniz: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$, $\mathrm{Sym}(\triangle) \times (\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$, $(\mathbb{R}^{3\times 3}, +) \times (\mathbb{Z}_6^*, \cdot) \times (\mathbb{C}, +) \times (\mathbb{R}[x], +)$ gibi.

Özel olarak, herhangi bir G grubunun kendisi ile direk çarpımını da alabilirsiniz, bu durumda $n \in \mathbb{Z} > 0$ olmak üzere $G^n = G \times \cdots \times G$ kısaltması kullanılır.

Alıştırma 6. İki abelyan grubun direk çarpımının da abelyan olduğunu kanıtlayın.

Gözlem. İki devrili grubun direk çarpımı her zaman devirli olmaz. Örneğin, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$ grubu 4 elemanlıdır ve etkisiz eleman hariç tüm elemanlarının derecesi 2'dir. (Bunu kontrol edin ve Alıştırma 1 ile karşılaştırın.) Ancak Lemma 3.1'den dolayı 4 elemanlı bir grubu üretebilmek için derecesi 4 olan bir eleman gereklidir. Dolayısı ile iki devirli grubun direk çarpımı olan $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ devirli değildir.

Bazı durumlarda iki devirli grubun direk çarpımı devirli olabilir. Örneğin $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ grubunda $o((1,1)) = 6$ olduğunu kanıtlayınız. Dolayısı ile, iki devrili grubun direk çarpımı olan $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ devirlidir.

Şimdi bu durum ile ilgili bir kriter bulacağız.

Önerme 3.5. $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ *olsun,* $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ *grubunun devirli olması için gerek ve yeter koşul* $\mathrm{ebob}(m,n) = 1$ *olmasıdır.*

Kanıt. Bu kanıtta kullanacağımız $mn = \mathrm{ebob}(m,n)\,\mathrm{ekok}(m,n)$ eşitliğini hatırlayalım. Kısaltma olarak $b = \mathrm{ebob}(m,n)$ ve $k = \mathrm{ekok}(m,n)$ yazalım, yani yeni eşitliğimiz $mn = bk$'dir.
($\Rightarrow$): Bu cümlenin karşıt tersi[1] olan "$\mathrm{ebob}(m,n) \neq 1$ ise $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ devirli değildir" cümlesini kanıtlaycağız. Tanım gereği $m \mid k$ olduğundan, her $a \in \mathbb{Z}_m$ için $ka = 0$ doğrudur. Benzer şekilde her $c \in \mathbb{Z}_n$ için $kc = 0$ da doğrudur. Dolayısı ile, her $(a,c) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ için $k(a,c) = (ka, kc) = (0,0)$ olur, yani Önerme 3.2'den dolayı gruptaki tüm elemanların dereceleri k sayısını böler. Ancak bizim durumumuzda $b > 1$ olduğu için, birinci satırdaki eşitlikten dolayı $k < mn$ olduğuna dikkat ediniz. Hiçbir elemanın derecesi mn olmadığı için Lemma 3.1'den dolayı bu durumda $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ devirli değildir.
($\Leftarrow$): Şimdi $b = \mathrm{ebob}(m,n) = 1$ olduğunu varsayıp $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ grubunun $(1,1)$ tarafından üretildiğini kanıtlayalım. Kısaltma olarak $d = o((1,1))$ yazalım, amacımız $d = mn$ olduğunu

[1] $P \Rightarrow Q$ cümlesinin karşıt tersi $\neg Q \Rightarrow \neg P$'dir. Bu biçimdeki her cümle mantıksal olarak karşıt tersine denktir; dolayısı ile biri doğru ise diğeri de doğrudur ve biri yanlış ise diğeri de yanlıştır. Bu nedenle, $P \Rightarrow Q$ biçimindeki bir cümleyi kanıtlamak veya yanlışlamak istediğimizde aynı şeyi karşıt tersi ile de yapabiliriz.

göstermek. İlk olarak $mn(1,1) = (mn, mn) = (0,0)$ olduğu için Önerme 3.2'den dolayı $d \mid mn$ olduğunu görebiliriz.

Ayrıca, derecenin tanımı gereği, $d(1,1) = (0,0)$ olduğu için $\mathbb{Z}_m$ grubunda $d1 = 0$ olur, yani $m \mid d$ diyebiliriz. Benzer şekilde, $n \mid d$ sonucuna da varılır. Yani d sayısı m ve n'nin ortak katıdır, öyleyse en küçük ortak katlarının da katıdır, yani $k \mid d$. Şimdi $b = 1$ varsayımından dolayı $k = mn$ olduğunu kanıtın birinci satırındaki eşitlikten görelim. Öyleyse bu paragrafta $mn \mid d$'yi kanıtladık.

Sonuç olarak, mn ve d birbirini bölen pozitif sayılar olduğu için eşit olmak zorundadırlar. Amacımız olan $mn = d = o((1,1))$ eşitliğini elde ettik. Şimdi $(1,1)$'in derecesi grubun eleman sayısına eşit olduğu için Lemma 3.1'den dolayı $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n = \langle (1,1) \rangle$ devirlidir. $\square$

Alıştırma 7. (a) $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{75}$ grubunun devirli olup olmadığına Önerme 3.5'i kullanarak karar verin.
(b) Bu grupta $(1,1)$'in derecesini hesaplayın.

Alıştırma 8. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ grubunu devirli olmadığını ama iki eleman tarafından üretilebileceğini kanıtlayın.

Alıştırma 9. (a) $A \leqslant G$ ve $B \leqslant H$ ise $A \times B \leqslant G \times H$ olduğunu kanıtlayın.
(b) $G \times H$ grubunun tüm altgruplarının yukarıdaki gibi olmayabileceğini bir örnekle gösterin.
(c) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$'ün tüm altgruplarını bulun.

Alıştırma 10. Eğer $g \in G$ ve $h \in H$ dereceleri sonlu olan elemanlarsa $G \times H$ grubunda $o((g,h)) = \text{ekok}(o(g), o(h))$ olduğunu gösterin. Aksi durumda, yani g ve h'den en az birinin derecesi sonsuzsa o zaman $o((g,h)) = \infty$ olduğunu kanıtlayın.