5 Gruplarda İzomorfizma Kavramı

İki kümenin eşit olup olmadığına elemanlarına bakarak karar verebiliriz, çünkü tanıma göre iki kümenin eşit olması için aynı elemanlara sahip olmaları gerekir. Her grup da aslında bir küme olduğu için elbette aynı tanım gruplar için de geçerlidir; yani iki grubun eşit olması için aynı elemanlara sahip olmaları gerekir.

Ancak bu eşitlik kavramı bizim gruplardaki bazı aynılıkları ölçmemize yetmiyor. Bazı gruplar eşit olmadıkları halde çarpım tabloları hemen hemen aynı çıkıyor. Biz bu grupları eş kabul etmek istiyoruz. Aynılık grubun yapısından (çarpım tablosundan) kaynaklandığı için bu gruplara *eşyapılı* ya da *izomorfik* gruplar diyeceğiz. (Eski Yunanca'da *iso-* eşit, *morf* ise şekil, form, yapı anlamlarına gelmektedir.)

5A İzomorfizma Örnekleri

Tanıma geçmeden önce, basit örnekleri inceleyelim.

Örnek 1. En küçük gruplar tek elemanlı gruplardır, onlarla başlayalım: $\{0\}$ ve $\{1\}$ kümeleri eşit olmadıkları halde, $(\{0\},+)$ ve $(\{1\},\cdot)$ grupları tek bir etkisiz elemandan oluştuğu için, grup teori açısından aralarında bir fark bulunmaz. Tek elemanlı tüm gruplar etkisiz elemandan ibaret olmak zorunda olduğu için, istersek hepsini $(\{e\},\cdot)$ olarak gösterebiliriz. Daha matematiksel bir ifade ile söylersek, tek elemanlı tüm gruplar $(\{0\},+)$ grubuna izomorfiktir.

Örnek 2. $n \geqslant 3$ için oklu n-gonun simetrileri grubuna C_n diyelim ve bu grubu inceleyelim. Bu grupta n adet döndürme olduğunu biliyoruz, döndürme açıları $2\pi/n$ radyanın katları olduğu için $\rho = \rho_{2\pi/n}$ kısaltmasını kullanarak, $C_n = \{\mathrm{id}, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}\}$ yazabiliriz. $\rho^0 = \mathrm{id}$ ve her $k, m \in \mathbb{Z}$ için $\rho^{k+mn} = \rho^k$ olduğunu hatırlarsak C_n ile $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ kümesi arasında doğal bir eşleşme (yani bire bir ve örten bir fonksiyon) olduğunu fark ederiz, bu eşleşmeyi $\alpha : C_n \to \mathbb{Z}_n$ ile gösterelim.

Ancak bu yalnızca kümeleri koruyan bir eşleşme mi yoksa grubun üzerindeki işlemi de koruyor mu sorusunu grup teoride her zaman kendimize sormalıyız. (Çünkü grubu grup yapan iki öğe vardır: küme ve işlem, biri diğerinden daha az önemli değildir.) C_n grubunda, $\rho^k \circ \rho^l = \rho^{k+l}$ olduğuna dikkat edin; demek ki, bu grupta bileşke almak üsleri toplamaya karşılık geliyor. Yani, C_n grubundan iki eleman alıp bileşke aldığımızda çıkacak sonuç ile bu iki elemanı α ile $\mathbb{Z}_n$ grubuna gönderip, orda topladıktan sonra α^{-1} ile C_n'e geri geldiğimizde çıkacak sonuç aynı. Bunu sembollerle ifade edersek, her $a, b \in C_n$ için

$$a \circ b = \alpha^{-1}(\alpha(a) + \alpha(b))$$

sağlanır. Dolayısı ile canımız hangi grupta çalışmak isterse orada çalışabiliriz çünkü iki grup arasında α'yı ya da α^{-1}'i kullanarak işlemi bozmadan geçiş yapmak mümkündür. (Bu örnekte α^{-1}'in neden var olduğuna dikkat ettiniz mi?)

Örnek 3. Dört elemanlı birçok grup örneği gördük, bunlardan dört tanesinin $(C_4, \circ)$, $(\mathbb{Z}_4, +)$, $(\mathrm{Sym}(\square), \circ)$, $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ tablolarını daha dikkatli inceleyelim.

$\circ$	I	ρ	ρ^2	ρ^3
I	I	ρ	ρ^2	ρ^3
ρ	ρ	ρ^2	ρ^3	I
ρ^2	ρ^2	ρ^3	I	ρ
ρ^3	ρ^3	I	ρ	ρ^2

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Yukarıdaki tablolar ikinci örneğin $n = 4$ özel halini göstermektedir. Tablolarda etkisiz elemanların görüldüğü yerleri inceleyiniz. Yukarıda verilen α eşleşmesinin tablolar üzerindeki etkisine dikkat ediniz. Yukarıdaki iki tablo arasındaki tek fark elemanların adlarının değiştirilmiş olmasıdır, bu yüzeysel farkı saymazsak tablolar aynıdır diyebiliriz. Bunlara birinci tip tablolar diyelim. Buradaki iki grup birbirine izomorfiktir.

$\circ$	I	ρ	x	y
I	I	ρ	x	y
ρ	ρ	I	y	x
x	x	y	I	ρ
y	y	x	ρ	I

$+$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(0,1)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(1,0)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(0,0)$

Yukarıdaki tablolarda da yine etkisiz elemanların yerlerini karşılaştırınız. İki tabloyu inceleyip, aslında aynı tablolar olduklarını yalnızca elemanlarının adlarının değiştirildiğini fark ediniz. Bu tablolara da ikinci tip tablolar diyelim. Bu iki grup da izomorfiktir.

Birinci ve ikinci tip tabloların farklı olduklarına, isim değiştirmekle dahi aynı yapılamayacaklarına dikkat ediniz. Bunun nedeni iki tip grup arasındaki yapısal farklardır. Örneğin ikinci tip gruplarda her elemanın karesi etkisiz elemana eşitken, birinci tip gruplarda karesi etkisiz eleman olmayan iki eleman bulunmaktadır. Bu yapısal bir farklılıktır, dolayısı ile yukarıdaki birinci tip gruplarla ikinci tip gruplar birbirine izomorfik değildir.

Alıştırma 1. (a) Yukarıdaki birinci tip grupların devirli olduğunu, ikinci tip grupların ise devirli olmadığını gösterin. (Devirli olmak grubun yapısal özelliklerinden biridir.)
(b) Dört elemanlı her grubun birinci veya ikinci tip olduğunu kanıtlayın.
(c) Aşağıda verilen dört elemanlı grupların veya altgrupların tipini bulun.
$(\{\pm 1, \pm i\}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_8^*, \cdot)$, $\langle 2 \rangle \leqslant (\mathbb{Z}_8, +)$, $\{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \leqslant S_4$.

5B İzomorfizmanın Tanımı

Artık izomorfizmanın tanımını verebiliriz.

Tanım. $(G, *)$ ve $(H, \diamond)$ iki grup, $\alpha : G \to H$ bir gönderme olsun. Eğer α bire bir, örten ve her $a, b \in G$ için

$$\alpha(a * b) = \alpha(a) \diamond \alpha(b)$$

eşitliğini sağlıyorsa, α'ya *izomorfizma* (ya da eşyapı dönüşümü) denir. Bu durumda G ve H *izomorfik* gruplardır deriz ve $(G, *) \cong (H, \diamond)$ ile gösteririz. İşlemlerin ne olduğu açıksa $G \cong H$ olarak kısaltabiliriz.

Örnek 4. Bölüm 5A'daki örnekleri özetleyelim: $(\{0\}, +) \cong (\{1\}, \cdot) \cong (\mathrm{id}, \circ)$; her $n \geqslant 3$ için, $C_n \cong \mathbb{Z}_n$; $(\mathrm{Sym}(\square), \circ) \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$.

Not. Alıştırma 1(b)'yi daha matematiksel olarak yazabiliriz: Dört elemanlı her grup $\mathbb{Z}_4$'e veya $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$'ye izomorfiktir.

Alıştırma 2. Aşağıda izomorfizmaları tanımı kullanarak kanıtlayın.
(a) $(\mathbb{Z}_2, +) \cong (\{\pm 1\}, \cdot) \cong (\{\mathrm{id}, \rho_\pi\}, \circ)$,
(b) $S_3 \cong D_3$,
(c) Geri dönüşüm sembolünün simetri grubu $\mathbb{Z}_3$'e izomorfiktir.
(d) $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$ ve $(\mathbb{Z}_8^*, \cdot)$ izomorfik mi?

Örnek 5. (a) Her $n \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha(n) = 2n$ olarak tanımlanan $\alpha : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ izomorfizmadır. Bu tip cümleleri kanıtlamak üç özelliği kontrol etmemiz gerekir. (1) Bire birlik: $\alpha(n) = \alpha(m)$ olsun o zaman $2n = 2m$ olur, burdan da $n = m$ elde edilir. (2) Örtenlik: $2\mathbb{Z}$ grubundan rasgele alacağımız bir eleman $2k = \alpha(k)$ biçiminde olduğu için α örtendir. (3) İşlemi koruma: her $m, n \in \mathbb{Z}$ için $\alpha(m + n) = 2(m + n) = 2m + 2n = \alpha(m) + \alpha(n)$ olur. Dolayısı ile α izomorfizmadır, yani $\mathbb{Z} \cong 2\mathbb{Z}$.
(b) Her $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ için $\mathbb{Z} \cong m\mathbb{Z}$ olduğunu kanıtlayın.

Alıştırma 3. Her $n \geqslant 2$ için $H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\}$ kümesinin S_n grubunda bir altgrup olduğu Alıştırma II'de sorulmuştu. Şimdi $H \cong S_{n-1}$ olduğunu kanıtlayın.

Alıştırma 4. G herhangi bir grup olsun. Her $g \in G$ için *eşlenik* izomorfizması $\epsilon_g : G \to G$, $\epsilon_g(x) = g^{-1}xg$ olarak tanımlanır. Bu göndermenin izomorfizma olduğunu kanıtlayın.

Önerme 5.1. *G devirli ve n elemanlı bir grupsa $\mathbb{Z}_n$'ye izomorfiktir. G devirli ve sonsuz bir grupsa $\mathbb{Z}$'ye izomorfiktir.*

Kanıt. $g \in G$ üreteç olsun, o zaman tanımdan $G = \langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ olduğunu hatırlayın. Şimdi ilk durumda $\alpha : G \to \mathbb{Z}_n$, ikinci durumda $\alpha : G \to \mathbb{Z}$, $\alpha(g^k) = k$ olarak tanımlansın. Her iki durumda da α'nın izomorfizma olması için gereken üç koşulu kontrol edin. $\square$

Alıştırma 5. Doğru mu, yanlış mı? G bir grup, $H \leqslant G$ ve $H \cong G$ ise $H = G$ olur.

Not. İki izomorfik grup arasında birden fazla izomorfizma olabilir. Örneğin, $\mathrm{id} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ve $-\mathrm{id} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $-\mathrm{id}(n) = -n$ göndermelerinin ikisi de izomorfizmadır. Daha ilginç örnekleri aşağıdaki alıştırmada bulabilirsiniz.

Alıştırma 6. $p > 2$ bir asal sayı olsun. Her $1 \leqslant k \leqslant p - 1$ için $\alpha_k : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, $\alpha_k(n) = kn$ göndermesinin izomorfizma olduğunu kanıtlayın. (Bu alıştırmada p asal olmazsa ne olur?)

5C İzomorfizmaların Özellikleri

Bu bölüm boyunca, G ve H iki grup, $e_G \in G$ ve $e_H \in H$ etkisiz elemanlar ve $\alpha : G \to H$ bir izomorfizma olsun.

Gözlemler.

1. *İzomorfizmalar etkisiz elemanı etkisiz elemana gönderir, yani $\alpha(e_G) = e_H$ doğrudur.*

   Kanıt. $\alpha(e_G) = h \in H$ kısaltmasını kullanalım, o zaman $h = \alpha(e_G) = \alpha(e_G e_G) = \alpha(e_G)\alpha(e_G) = h^2$ olur. H bir grup olduğu için $h = h^2$ eşitliğinde h'leri sadeleştirebiliriz (elbette iki tarafı da h^{-1} ile çarparak). Böylece $\alpha(e_G) = h = e_H$ elde edilir. $\square$

2. *İzomorfizmalar tersleri terslere gönderir, yani her $g \in G$ için $\alpha(g^{-1}) = \alpha(g)^{-1}$ sağlanır.*

   Kanıt. Bir grupta her elemanın tek bir tersi olduğu için $\alpha(g^{-1})\alpha(g) = e_H$ olduğunu göstermek yeterlidir. İzomorfizmanın işlemi koruma özelliğini ve Gözlem 1'i kullanarak kanıtı tamamlayınız. □

3. *Her $n \in \mathbb{Z}$ ve her $g \in G$ için $\alpha(g^n) = \alpha(g)^n$ doğrudur.*

   Kanıt. Tanımdan dolayı $n = 1$, ve yukarıdaki gözlemlerden dolayı $n = 0, -1$ doğrudur. Diğer durumlar tümevarım ile kanıtlanabilir. □

4. *İzomorfizmalar altgrupları altgruplara gönderir, yani $A \leqslant G$ ise $\alpha(A) \leqslant H$ olur.*

   Kanıt. Kanıt okuyucuya bırakılmıştır. Kanıtı yaparken α'nın bire birliğini veya örtenliğini kullanmadığınıza dikkat ediniz. □

5. *İzomorfizmaların tersi vardır ve tersleri de izomorfizmadır.*

   Kanıt. Bire bir ve örten her fonksiyonun tersinin olduğunu ve tersinin de bire bir ve örten olduğunu diğer derslerden biliyoruz. Öyleyse şimdi $\alpha^{-1} : H \to G$ fonksiyonunun işlemi koruduğunu gösterelim. H grubundan rasgele $h, k \in H$ elemanlarını seçelim. Amacımız $\alpha^{-1}(hk) = \alpha^{-1}(h)\alpha^{-1}(k)$ olduğunu kanıtlamak. Şimdi α örten olduğu için $h = \alpha(g)$ ve $k = \alpha(l)$ eşitliklerini sağlayan $g, l \in G$ olduğunu biliyoruz. O halde, $hk = \alpha(g)\alpha(l) = \alpha(gl)$ olur. Ayrıca $\alpha^{-1}\alpha = \mathrm{id}$ olduğunu gözden kaçırmayınız. Şimdi kanıtlamak istediğimiz eşitliğin solundan başlayıp, gerekli dönüşümleri yapıp, eşitliğin sağına erişelim: $\alpha^{-1}(hk) = \alpha^{-1}(\alpha(gl)) = gl = \alpha^{-1}(h)\alpha^{-1}(k)$. İstenen eşitliği elde ettik. □

   Not. Yukarıdaki kanıtta kilit adım $h = \alpha(g)$ ve $g = \alpha(l)$ eşitliklerini yazmak gerektiğini düşünmektir. Öğrenciler bazen bu adımı bulmakta zorlanabiliyorlar, ancak kanıt yaparken genel düşünceniz problemi bildiğiniz alana çekip orada çözmek olmalıdır. Yukarıdaki gözlemde de, α'nın izomorfizma olduğunu bildiğimiz için değişkenlerimizi α ile yazmak doğru bir yaklaşımdır.

6. *İki izomorfizmanın bileşkesi de izomorfizmadır. Dolayısı ile, izomorfik olmak gruplar için bir denklik bağıntısıdır.*

   Kanıt. Okuyucuya bırakılmıştır. □

Şimdi izomorfizmaların grubun hangi özelliklerini koruduğuna bakalım. Bu bölümde de G ve H iki grup ve $\alpha : G \to H$ bir izomorfizma olmaya devam etsin.

Gözlemler.

1. *İzomorfizmalar grubun eleman sayısını korur, yani $G \cong H$ ise $|G| = |H|$ sağlanır.*
   Kanıt. Bire bir ve örten tüm göndermeler eleman sayısını koruduğu için izomorfizmalar da korur. □

2. *Yer değiştiren elemanların izomorfik görüntüleri de yer değiştirir, bunun tersi de doğrudur; yani $gk = kg$ ancak ve ancak $\alpha(g)\alpha(k) = \alpha(k)\alpha(g)$.*

Kanıt. Önce $gk = kg$ olduğunu varsayalım, burdan $\alpha(gk) = \alpha(kg)$ olur, izomorfizmaların işlemi koruma özelliğinden $\alpha(g)\alpha(k) = \alpha(k)\alpha(g)$ elde edilir. (Bu kanıtta bire birliği ve örtenliği kullanmadık.)

Tersini kanıtlamak için $\alpha(g)\alpha(k) = \alpha(k)\alpha(g)$ olduğunu varsayıp, kolayca $\alpha(gk) = \alpha(kg)$ eşitliğini elde ederiz. Şimdi α'nın bire birliğini kullanarak istenen sonuca ulaşırız. (Bu kanıtta bire birliğin önemli bir rol oynadığına dikkat edin.) □

3. *Abelyanlık izomorfizma altında korunur; yani iki grup izomorfikse, ya ikisi birden abeylandır ya da hiçbiri abelyan değildir.*

   Kanıt. Gözlem 2'nin kolay bir sonucudur. □

4. *Devirli olmak izomorfizma altında korunur.*

   Kanıt. $G = \langle g \rangle$ ise $H = \langle \alpha(g) \rangle$ olduğunu kanıtlayınız. □

5. *İzomorfizmalar elemanların derecelerini korur, yani her $g \in G$ için $o(g) = o(\alpha(g))$ sağlanır.*

   Kanıt 1. Eğer $g \in G$ olmak üzere $o(g) = n$ ve $o(\alpha(g)) = m$ olsun (m ve n sonsuz da olabilsin). İlk olarak, $n < \infty$ olduğunu kabul edelim, o zaman $g^n = e_G$ olur, iki tarafa α uygularsak $\alpha(g)^n = e_H$ olur. Burdan da $m = o(\alpha(g)) \mid n$ sonucuna varırız, yani m de sonludur. Aynı cümleleri $\alpha(g)$ ve α^{-1} izomorfizması için yazarsak bu defa $n \mid m$ sonucunu elde ederiz. İkisi de pozitif tam sayılar olduğu için $m = n$ olur. Diğer durum olan $n = \infty$ durumu okuyucuya bırakılmıştır. □

   Kanıt 2. Her $g \in G$ için $o(g) = |\langle g \rangle|$ olduğunu hatırlayın. $A = \langle g \rangle$ yazalım, bu durumda $\alpha(A) = \langle \alpha(g) \rangle$ olur, dolayısı ile $o(\alpha(g)) = |\alpha(A)|$ sağlanır. Şimdi α'yı A altgrubuna kısıtlayalım, bu kıstalama da izomorfizma olduğu için Gözlem 1'den $o(g) = |A| = |\alpha(A)| = o(\alpha(g))$ elde edilir. □

Bu bölümün kalanında iki grubun izomorfik olmadığının nasıl kanıtlanabileceğine dair örnekler yapacağız.

Örnek 6. $(\mathbb{Z}_7, +)$ ve $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ gruplarının izomorfik olmadıklarını görelim: Birinci grup 7 elemanlı ancak ikinci grup 6 elemanlı (neden?) olduğu için iki grubun izomorfik olması Gözlem 1 ile çelişir.

Örnek 7. Aynı sayıda elemana sahip S_3 ve $\mathbb{Z}_6$ gruplarının izomorfik olmadıklarını görelim: birinci grup abelyan değil ama ikinci grup abelyan olduğu için Gözlem 3'ten dolayı izomorfik olamazlar.

Örnek 8. Hem abelyan hem de aynı sayıda elemana sahip $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ve Z_9 gruplarının izomorfik olmadıklarını Gözlem 4'ü kullanarak siz kanıtlayın.

Örnek 9. $(\mathbb{R}, +)$ ve $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ gruplarının izomorfik olmadıklarını, ikinci grupta derecesi 2 olan bir eleman olmasına rağmen birinci grupta hiçbir elemanın derecesinin 2 olmadığını göstererek ve Gözlem 5'i kullanarak kanıtlayın.

Örnek 10. $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$ ve $(\mathbb{R},+)$ gruplarının hiçbirinin bir diğerine izomorfik olmadığını kanıtlayalım. Öncelikle ilk iki grup sayılabilir sonsuz ve son grup sayılamaz sonsuz olduğu için son grup diğerlerine izomorfik değildir.

$(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$ gruplarının izomorfik olmadığını yeni bir teknikle göstereceğiz. Önce iki grubun izomorfik olduğunu kabul edelim ve $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ izomorfizmasını seçelim. Diyelim $\alpha(1) = a/b \in \mathbb{Q}$ olsun. O zaman $a/2b$ de bir rasyonel sayı olur. α örten olduğuna göre $\alpha(n) = a/2b$'yi sağlayan bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır. Şimdi $\alpha(n+n) = \alpha(n) + \alpha(n) = a/2b + a/2b = a/b = \alpha(1)$ olduğuna göre, α'nın bire birliğinden dolayı $2n = 1$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmalı. Böyle bir sayı olmadığına göre çelişki elde ettik. Çelişkinin nedeni de $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$ gruplarının izomorfik olduğunu varsaymış olmamız. Öyleyse $\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Q}$.

Alıştırma 7. Aşağıdaki izomorfizmaları kanıtlayın.

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^* \right\} \cong (\mathbb{R}^*, \cdot), \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} \cong (\mathbb{R}, +).$$

Alıştırma 8. m, n'yi bölen bir tam sayı olsun, $\mathbb{Z}_n$'de $\mathbb{Z}_m$'ye izomorfik bir altgrup bulun.

Alıştırma 9. Tetrahedronun köşelerini 1'den 4'e kadar numaralandırın. Tetrahedronun simetri grubunu $\mathcal{T}$ ile, yalnızca döndürmelerin oluşturduğu altgrubu $\mathcal{T}_\mathcal{D}$ ile gösterelim. O zaman $\mathcal{T}_\mathcal{D} \leqslant \mathcal{T} \leqslant S_4$ olduğuna dikkat edin. Şimdi $\mathcal{T}_\mathcal{D}$'nin ve $\mathcal{T}$'nin S_4'ün hangi altgruplarına izomorfik olduklarını bulun.

Alıştırma 10. Aşağıdaki cümleleri kanıtlayın.
(a) S_3'te $\mathbb{Z}_2$'ye ve $\mathbb{Z}_3$'e izomorfik altgruplar vardır.
(b) S_3'te $\mathbb{Z}_6$'ya izomorfik altgrup yoktur.
(c) $S_3 \times S_3$'te $\mathbb{Z}_6$'ya izomorfik altgrup vardır.