Alıştırma 1. $n \geqslant 3$ olsun. D_n grubu, $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$' ye izomorfik midir?

Çözüm. Biliyoruz ki, tüm n'ler için $\mathbb{Z}_n$ grubu abelyandır. Haliyle, $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ grubu da abelyan olur. (İki abelyan grubun direkt çarpımının da abelyan olduğundan daha önceki derslerde bahsetmiştik.) Ancak, D_n grubunun abelyan olmadığını biliyoruz. Değişmeli olmak gruplar için yapısal bir özellik olduğundan (ders notlarından hatırlayın, abelyanlık izomorfizma altında korunur), verilen iki grubun izomorfik olamayacağı açıktır.

Alıştırma 2. S_n'nin $\{1, \cdots, n\}$ kümesi üzerindeki birebir ve örten fonksiyonların (permütasyonların) oluşturduğu grup olduğunu, A_n'nin ise çift sayıda transpozisyonun çarpımı olarak yazılan permütasyonlardan oluşan altgrubu olduğunu hatırlayın. (Ali Nesin'in kitabında sırasıyla $\operatorname{Sym} n$ ve $\operatorname{Alt} n$ sembolleri ile gösteriliyorlar.)

$n \geqslant 3$ için, S_n grubu $A_n \times \mathbb{Z}_2$'ye izomorfik olabilir mi?

Çözüm. $A_n \times \mathbb{Z}_2$ grubunun, birim elemandan farklı olan $(\mathrm{id}, 1)$ elemanı için şunu gözlemleyelim:

Herhangi bir $(\sigma, a) \in A_n \times \mathbb{Z}_2$ için, $(\mathrm{id}, 1)(\sigma, a) = (\mathrm{id}\,\sigma, 1 + a) = (\sigma\,\mathrm{id}, a + 1) = (\sigma, a)(\mathrm{id}, 1)$ sağlanır. Yani, $(\mathrm{id}, 1)$ elemanı gruptaki her elemanla değişmelidir. Ancak S_n grubunda birim eleman dışında böyle bir eleman bulmak mümkün değildir.(Birim permütasyon dışında her permütasyon $\{1, \cdots, n\}$ sayılarından en az birini kendinden başka bir sayıya götüreceğinden, bu elemanın diğer tüm permütasyonlarla değişmeli olması beklenemez!) Bu durumda verilen iki grup izomorfik olamaz. (Burada tam olarak da, ders notlarındaki 5C bölümde bulunan ikinci Gözlemler listesindeki, 2.gözlemi kullandığımıza dikkat edin.)

Alıştırma 3. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ grubu devirli midir?

Çözüm. Bildiğiniz gibi, aslında bu örneği daha önce çözmüştük. Şimdi, öğrendiğimiz izomorfizma kavramıyla yeni bir çözümünü daha göreceğiz.

Ders notlarındaki Önerme 5.1'den hatırlarsınız ki, sonsuz devirli gruplar $\mathbb{Z}$'ye izomorftur. Bu durumda, eğer $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$'nin devirli olduğunu varsayarsak, bir $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ izomorfizması yazılabilir. $\phi(1) = (a, b)$ olsun (Böyle bir (a, b) neden var, düşünün!). Bu durumda a ve b aynı anda 0'a eşit olamaz(Neden?). ϕ örten olduğundan, bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır öyle ki, $\phi(n) = (a, b+1)$ eşitliği sağlanır. ϕ'nin işlemi koruma özelliğinden

$$\phi(n) = \phi(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ adet}}) = \underbrace{\phi(1) + \cdots \phi(1)}_{n \text{ adet}} = n\phi(1)$$

olur. O zaman $(a, b + 1) = n(a, b) = (na, nb) \Rightarrow a = na \;$ ve $\; b + 1 = nb$ elde ederiz.

Şimdi durumları ayrı ayrı değerlendirelim. Diyelim ki $a \neq 0$ olsun, bu durumda $n = 1$ olacaktır ve ikinci eşitlikten $b + 1 = b \Rightarrow 1 = 0$ çelişkisini elde ederiz. Eğer $a = 0$ olursa (bu durumda $b \neq 0$ olmak zorundadır), o zaman yine ikinci eşitlikten $(n - 1)b = 1$ elde ederiz ve buradan da sadece $b = 1$ ya da $b = -1$ olabilir. Bu da, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$'nin üretecinin $(0, 1)$ ya da $(0, -1)$ olabileceğini gösterir. Ama üreteçlerden herhangi biriyle, mesela $(1, 0)$ elemanını üretemeyeceğimiz açıktır. Yani, bu durumda da bir çelişki elde etmiş oluruz. Sonuç olarak, böyle bir ϕ izomorfizmasının var olamayacağını göstermiş oluruz.

Alıştırma 4. $\mathbb{Q}_{>0}$ ile pozitif rasyonel sayıları gösterelim. $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$'nın bir grup olduğuna dikkat edin(Gerekirse gösterin). Bu grup ile $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun izomorfik olmadığını gösterin.

Çözüm. Varsayalım ki , $\varphi : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Z}$ bir izomorfizma olsun. φ örten olduğundan $1 \in \mathbb{Z}$ için, bir $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_{>0}$ elemanı vardır öyle ki, $\varphi(\frac{p}{q}) = 1$ sağlanır. Burada $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_{>0}$ elemanının en sade halini alalım, yani $p, q \in \mathbb{Z}$ ve $\text{ebob}(p, q) = 1$'dir. İzomorfizmalar tersleri terslere götürdüğünden, $\varphi(\frac{q}{p}) = -1$ olur. Özel olarak, bir $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ asal sayısını alalım ve $\varphi(x) = n$ olsun($n = 0$ olamaz. Neden?). Bu durumda; eğer n pozitifse,

$$\varphi(x) = n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ tane}} = \underbrace{\varphi(\frac{p}{q}) + \cdots + \varphi(\frac{p}{q})}_{n \text{ tane}} = \varphi(\underbrace{\frac{p}{q} \cdots \frac{p}{q}}_{n \text{ tane}}) = \varphi(\frac{p^n}{q^n}),$$

eğer n negatifse,

$$\varphi(x) = n = \underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_{n \text{ tane}} = \underbrace{\varphi(\frac{q}{p}) + \cdots + \varphi(\frac{q}{p})}_{n \text{ tane}} = \varphi(\underbrace{\frac{q}{p} \cdots \frac{q}{p}}_{n \text{ tane}}) = \varphi(\frac{q^n}{p^n})$$

olur. φ birebir olduğundan, $x = \frac{p^n}{q^n} = (\frac{p}{q})^n$ ya da $x = \frac{q^n}{p^n} = (\frac{q}{p})^n$ olur. Ancak, x asal sayı olduğundan n sadece 1'e eşit olabilir. O zaman, asal sayılar φ altında sadece $\frac{p}{q}$ veya $\frac{q}{p}$'ye gidebilir. Sonsuz tane asal sayı var olduğu ve φ birebir olduğu için bir çelişki elde etmiş oluruz. Demek ki, böyle bir izomorfizma olması mümkün değildir.

Çözüm 2. $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ grubunun devirli olmadığını göstererek bu soruya yeni bir çözüm verin.

Alıştırma 5. G, H birer grup olsun ve bir $\phi : G \to H$ fonksiyonu verilsin. ϕ bir izomorfizma ise $\Gamma = \{(g, \phi(g)) | g \in G\}$ kümesinin $G \times H$'nin alt grubu olduğunu gösterin.

Çözüm. $(g_1, \phi(g_1)),\ (g_2, \phi(g_2)) \in \Gamma$ elemanlarını alalım.

$$(g_1, \phi(g_1))(g_2, \phi(g_2)) = (g_1 g_2, \phi(g_1)\phi(g_2)) = (g_1 g_2, \phi(g_1 g_2)) \in \Gamma$$

olur, çünkü $g_1 g_2 \in G$'dir.

ϕ izomorfizma olduğundan, $\phi(e_G) = e_H$ olduğunu biliyoruz. O zaman, birim eleman için $(e_G, e_H) = (e_G, \phi(e_G)) \in \Gamma$ sağlanır.

Herhangi bir $(g, \phi(g)) \in \Gamma$ elemanı için, $(g, \phi(g))^{-1} = (g^{-1}, (\phi(g))^{-1}) = (g^{-1}, \phi(g^{-1})) \in \Gamma$ ifadesi sağlanır.

Böylece Γ kümesinin $G \times H$'nin alt grubu olduğunu göstermiş oluruz. Dikkat ederseniz, burada ϕ'nin birebir ve örten olduğunu hiç kullanmadık. Bu, sonraki haftalar için aklımızın bir köşesinde kalsın.

Alıştırma 6. G devirli bir grup ve $x \in G$ için, $G = \langle x \rangle$ olsun. Bir $\varphi : G \to G$ izomorfizması verilsin. Bu izomorfizmanın x'in gittiği yer ile belirlendiğini ve $\varphi(x)$'in G'yi ürettiğini kanıtlayın. Bunu kullanarak $\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$ olan tüm izomorfizmaları bulun.

Çözüm. $G = \langle x \rangle$ olduğundan, herhangi bir $g \in G$ elemanı için, $g = x^n$'yi sağlayan bir n tamsayısı vardır. O zaman, φ bir izomorfizma olduğundan

$$\varphi(g) = \varphi(x^n) = \varphi(\underbrace{x \cdots x}_{n \text{ tane}}) = \underbrace{\varphi(x) \cdots \varphi(x)}_{n \text{ tane}} = (\varphi(x))^n$$

olur. Yani x'in φ altında nereye gittiğini bilirsek, her $g \in G$ elemanının nereye gideceğini bulabiliriz. Aynı zamanda, φ birebir ve örten olduğundan, her $h \in G$ için tek bir $g \in G$ elemanı vardır öyle ki $\varphi(g) = h$ olur. Bu durumda, her $h \in G$ elemanı için bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır ve $h = \varphi(g) = (\varphi(x))^n$ olacak şekilde $\varphi(x)$ tarafından üretilir. Yani $\varphi(x)$ de, G için bir üreteç olur. Buradan şu sonucu çıkarabiliriz, bir grup üzerindeki izomorfizmalar üreteçleri birbirine götürerek belirlenebilir.

Bundan yola çıkarak, $\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$ olan bütün izomorfizmaları bulmak için, $\mathbb{Z}_{12}$'nin üreteçlerini belirlemeliyiz. Bildiğimiz gibi bunlar, $1, 5, 7$ ve 11 elemanları. Bu durumda, 1'i kendisi dahil bu üreteçlere göndererek 4 farklı izomorfizma elde edebiliriz:

$\varphi_1 : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$ ve $\varphi : 1 \mapsto 1$ ise, bir $g \in \mathbb{Z}_{12}$ için, $\varphi(g) = g$ olarak tanımlanır. Yani, birim fonksiyondan başka bir şey değildir.

$\varphi_2 : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$ ve $\varphi : 1 \mapsto 5$ ise, bir $g \in \mathbb{Z}_{12}$ için, $\varphi(g) = 5g \pmod{12}$ olarak tanımlanır.

$\varphi_3 : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$ ve $\varphi : 1 \mapsto 7$ ise, bir $g \in \mathbb{Z}_{12}$ için, $\varphi(g) = 7g \pmod{12}$ olarak tanımlanır.

$\varphi_4 : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$ ve $\varphi : 1 \mapsto 11$ ise, bir $g \in \mathbb{Z}_{12}$ için, $\varphi(g) = 11g \pmod{12}$ olarak tanımlanır.

Bu fonksiyonların gerçekten izomorfizma olduğunu da siz gösterin.

Alıştırma 7. S_6'nın (1234) ve (56) elemanları ile üretilen alt grubunun $\mathbb{Z}_{20}^*$'a izomorfik olduğunu kanıtlayın.

Çözüm. $\sigma = (1234)$ ve $\tau = (56)$ olsun. Öncelikle $\langle \sigma, \tau \rangle$ grubunu inceleyelim. σ ve τ ayrık döngüler olduklarından çarpmaya göre değişmelidirler. Bu durumda,

$$\langle \sigma, \tau \rangle = \{\sigma^m \tau^n | m, n \in \mathbb{Z}\}$$

olur. σ'nın derecesi 4, τ'nun derecesi 2 olduğundan, bu grubun 8 elemanlı olduğu açıktır ve hatta elemanları tek tek yazmak istersek; $\langle \sigma, \tau \rangle = \{\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \sigma^3\tau\}$ olur.

$\mathbb{Z}_{20}^* = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\} = \langle 3, 11 \rangle = \{3^i 11^j | i = 0, 1, 2, 3,\ j = 0, 1\}$ olduğunu gözlemleyelim. (**Dikkat.** Burada neden 3 ve 11 elemanlarını aldık, başka elemanlar da seçebilir miyiz? Neden?)

Şu fonksiyonu tanımlayalım:

$\Phi : \langle \sigma, \tau \rangle \to \mathbb{Z}_{20}^*$, $\Phi(\sigma^m \tau^n) = 3^m 11^n$ olsun.

Gerçekten bir izomorfizma olduğunu siz gösterin.

Alıştırma 8. $(\mathbb{R}, +)$ grubunun $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ grubuna izomorfik olduğunu gösterin.

Çözüm. Bunu göstermek için, iki grup arasında bir fonksiyon yazıp, izomorfizma olma özelliklerini sağladığını kontrol etmeliyiz.

Bunun için, Analiz'den çok iyi bildiğimiz, reel sayılar üzerinde tanımlı bir fonksiyondan yararlanacağız.

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ve $\varphi(x) = e^x$ olarak tanımlansın. ($\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$ olduğundan fonksiyonun iyi tanımlı olduğu açık.)

Şimdi bu fonksiyonun birebir, örten olduğunu ve işlemi koruduğunu göstermeliyiz.

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için, $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ olsun. O zaman $e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 \ln(e) = x_2 \ln(e) \Rightarrow x_1 = x_2$ olur. Yani φ birebirdir.

Her $y \in \mathbb{R}_{>0}$ için, bir $\ln(y) \in \mathbb{R}$ elemanı vardır öyle ki, $\varphi(\ln(y)) = e^{\ln(y)} = y$ sağlanır. Yani φ örtendir.

(Aslında e^x fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu Analiz'den çok iyi biliyoruz ve hatta ln fonksiyonunu onun tersi olarak tanımladığımızı hatırlayın.)

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ olsun. $\varphi(x_1 + x_2) = e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} e^{x_2} = \varphi(x_1)\varphi(x_2)$ olur.

Sonuç olarak tanımladığımız φ fonksiyonu bir izomorfizmadır.