

Analitik Geometri

Alıştırma II

David Pierce

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi

Matematik Bölümü

mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

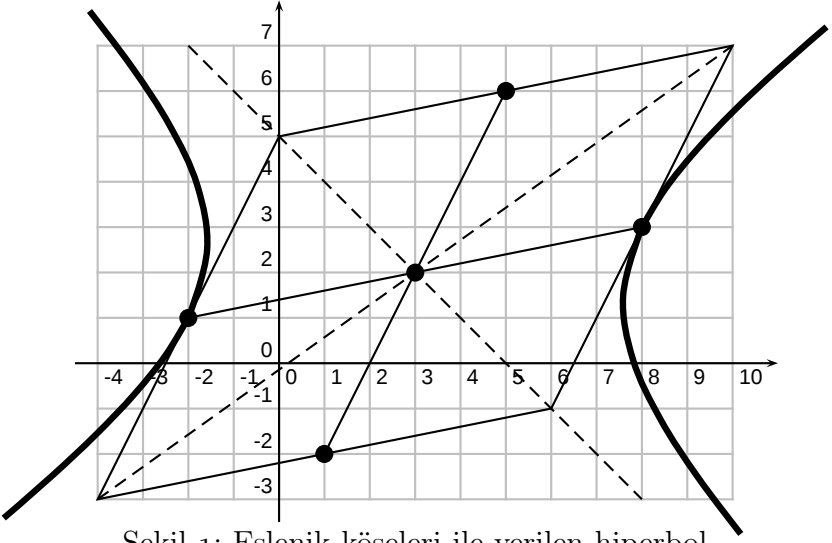
polytropy.com/

analitik-geometri-ozeti.html

Nisan 2020

Analitik geometride, Öklid'in cetvelinin ve pergelinin yerine denklemler kullanıyoruz. Eğer bir eğrinin özelliklerini bilirse, eğriyi tanımlayan bir denklem elde ediyoruz. Tersine bir denklem verilirse, tanımlanan eğrinin özelliklerini buluyoruz. Kısaca geometri ve cebir arasında bir ilişki vardır. Son alıştırmamızın amacı, bu ilişkiye bir örnek vermektir. Özellikle sadece bir cebir alıştırması değildi, ama alıştırmadaki cebirin geometrik anlamı vardır. Geometri, alıştırmamızın cebiri için bir kontrol-dür.

Başka bir kitapçıkta son alıştırma için cevaplarınızı bir araya getirdim. Ona dayanarak yeni alıştırmamız,



Şekil 1: Eşlenik köşeleri ile verilen hiperbol

- diğer kitapçığa yazdığımı kontrol edip düzeltmektir;
- kendi sonuçlarınızı kontrol edip düzeltmektir.

Örneğin Şekil 1’de bir hiperbol çizilmiştir, ve aynı zamanda hiperbolün iki eşlenik diyametresi, bu diyametrelerdeki köşeler, ve hiperbolün “sınır paralelkenarı” (kenarları diyametrelere paraleldir ve köşelerden geçer). Sınır paralelkenarının köşegenleri, hiperbolün asimptotlarıdır. Hiperbolü belirtmek için, aşağıdaki bilgiler yeter:

- $(3, 2)$ noktası, hiperbolün merkezidir;
- $(8, 3)$ ve $(5, 6)$ noktası, yani $(5, 1) + (3, 2)$ ve $(2, 4) + (3, 2)$ noktası, hiperbolün eşlenik köşeleridir;
- $(8, 3)$ noktası, hiperbolün üzerindedir.

Bundan dolayı

$$2(x - 3) - (y - 2) = 0, \quad (x - 3) - 5(y - 2) = 0$$

denklemleri, hiperbolün verilen diyametrelerini tanımlar, ve

$$\left(\frac{2(x-3)-(y-2)}{9}\right)^2 - \left(\frac{(x-3)-5(y-2)}{18}\right)^2 = 1 \quad (1)$$

denklemini, hiperbolün kendisini tanımlar. Özel olarak yukarıdaki köşelerin her birinde denklem (1)'in kare terimlerinin biri 0, biri 1 olur. Denklem (1) *açılırsa* (alıştırma metninde “Denklemini açıklamak” yazdım ama “Denklemini açmak” demek istedim)

$$5x^2 - 2xy - 7y^2 - 26x + 34y - 103 = 0 \quad (2)$$

elde edilir. Bu yeni denklemden yukarıdaki köşeler elde edilemez, ama *karelere tamamlayarak*

$$(5x - y - 13)^2 - 6^2(y - 2)^2 = 540 \quad (3)$$

denklemini elde edebiliriz. Burada sizlerden birkaç soru geldi. **Kareye tamamlayarak** tek-değişkenli, iki-dereceden denklemler çözeriz: Eğer $a \neq 0$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

Bu hesaplar, aşağıdaki kural (4) için bir kanıttır, çünkü şimdi

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

olur, dolayısıyla

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4)$$

olur. Başka bir şekilde

$$\begin{aligned} 4a(ax^2 + bx + c) &= (2ax)^2 + 2(2ax)b + 4ac \\ &= (2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac), \end{aligned}$$

dolayısıyla ($a \neq 0$ olduğunda)

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

ve tekrar kural (4) çıkar. Benzer bir şekilde genel

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

denkleminde $ax^2 + bxy + dx$ teriminden bir kare elde etmek için $4a$ ile çarparak

$$\begin{aligned} 4a(ax^2 + bxy + dx) &= (2ax)^2 + 2(2ax)(by + d) \\ &= (2ax + by + d)^2 - (by + d)^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Eğer buradaki katsayılar tamsayı ise, ve ayrıca b ve d çift ise, o zaman a ile çarpmak yeter. Örneğin denklem (2),

$$5(5x^2 - 2xy - 26x) + 5(-7y^2 + 34y - 103) = 0$$

denkleminde denktir; ayrıca

$$\begin{aligned} 5(5x^2 - 2xy - 26x) &= (5x - y - 13)^2 - (y + 13)^2, \\ -(y + 13)^2 + 5(-7y^2 + 34y - 103) &= -36y^2 + 144y - 684 \\ &= -36(y - 2)^2 - 540 \end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı denklem (3), denklem (2)'ye denktir.

Denklem (3)'ün iki kare terimi (3, 2) noktasında 0 olur, yani

$$5x - y - 13 = 0, \quad y - 2 = 0$$

denklemlerinin ortak çözümü, (3, 2) olur. Ayrıca

$$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 6^2 \cdot 15,$$

dolayısıyla denklem (2)

$$\left(\frac{5(x-3) - (y-2)}{6\sqrt{15}} \right)^2 - \left(\frac{y-2}{\sqrt{15}} \right)^2 = 1 \quad (5)$$

biçiminde yazılabilir. Kontrol etmek için, eğer denklem (5)'in ilk kare terimi 1 ve ikinci kare terimi 0 ise, o zaman

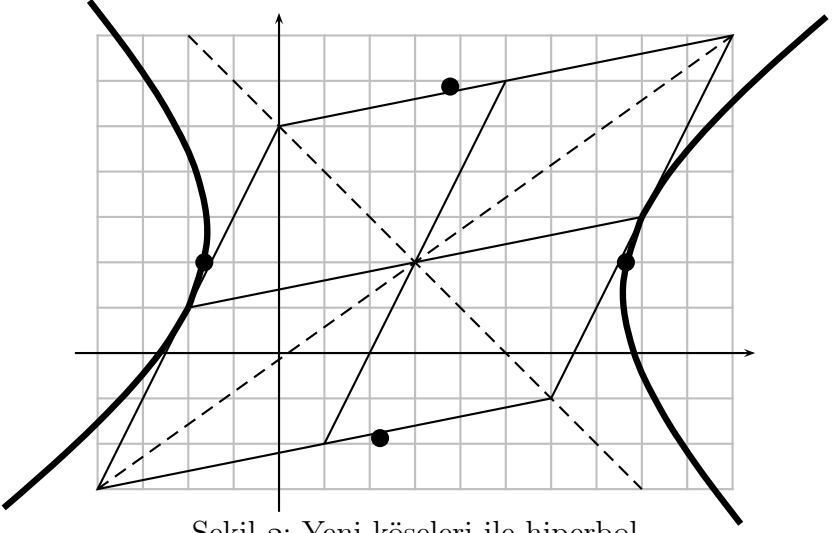
$$\begin{aligned} y &= 2, \\ 5(x-3) &= \pm 6\sqrt{15}, \\ x &= 3 \pm \frac{6\sqrt{15}}{5} \end{aligned}$$

olur. Diğer durumda, eğer ilk kare terimi 0 ve ikinci kare terimi 1 ise, o zaman

$$\begin{aligned} y &= 2 \pm \sqrt{15}, \\ 5(x-3) &= \pm \sqrt{15}, \\ x &= 3 \pm \frac{\sqrt{15}}{5} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\frac{\sqrt{15}}{5} \approx 0.77, \quad \frac{6\sqrt{15}}{5} \approx 4.65$$



Şekil 2: Yeni köşeleri ile hiperbol

olur, dolayısıyla eğer elde ettiğimiz

$$\left(3 \pm \frac{6\sqrt{15}}{5}, 2\right), \quad \left(3 \pm \frac{\sqrt{15}}{5}, 2 \pm \sqrt{15}\right)$$

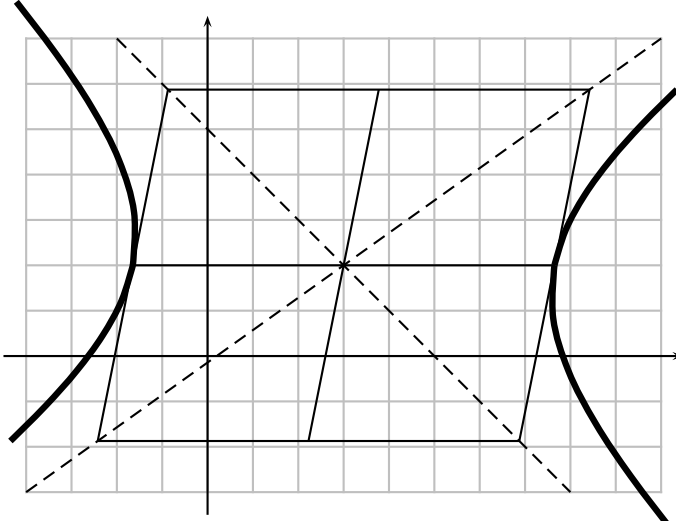
noktalarını Şekil 1'e eklersek Şekil 2 meydana gelir. Noktaların yeri doğru gibi gözüktüğünde sadece denklem (5)'i kullanarak Şekil 3'ü çizebiliriz. Kısaca

- Şekil 1'den denklem (1),
- denklem (1)'den denklem (2),
- denklem (2)'den denklem (5),
- denklem (5)'ten Şekil 3

elde edilir. Denklem (5) denklem (1)'den daha faydalıdır çünkü bundan

$$x = 3 + \frac{y-2}{30\sqrt{15}} \pm \frac{1}{5} \sqrt{1 + \left(\frac{y-2}{\sqrt{15}}\right)^2}$$

denklemini elde edilir. Böylece hiperbol, iki *fonksiyonun* grafiğidir. Eğer $y = f(x)$ gibi bir ifade istersek, o zaman denklem



Şekil 3: Yeni diyametreleri ile hiperbol

(2)'yi

$$7y^2 + 2yx - 5x^2 - 34y + 26x + 103 = 0 \quad (6)$$

biçiminde yazarız. (Aynı şeyi yapmak zorunda değilsiniz; ilgilenenler için bu örneği veriyorum.) Denklem (6)'da

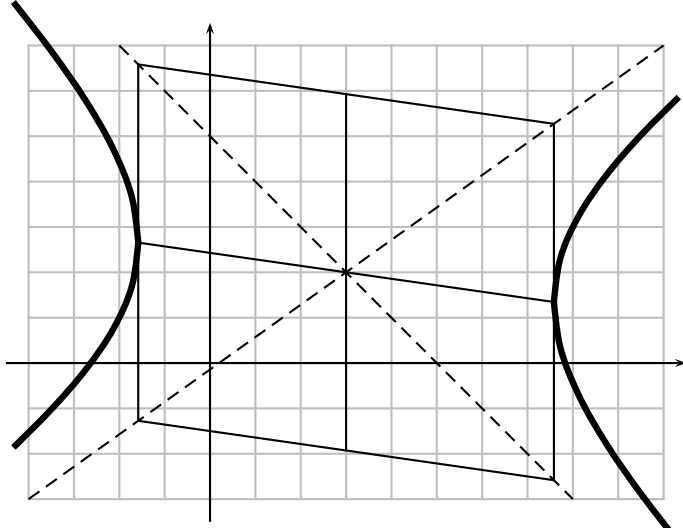
$$\begin{aligned} 7(7y^2 + 2yx - 34y) &= (7y + x - 17)^2 - (x - 17)^2, \\ -(x - 17)^2 + 7(-5x^2 + 26x + 103) &= -36x^2 + 216x + 432 \\ &= -36(x^2 - 6x) + 432 \\ &= -36(x - 3)^2 + 756 \end{aligned}$$

olur, dolayısıyla denklem (2),

$$(7y + x - 17)^2 - 36(x - 3)^2 + 756 = 0 \quad (7)$$

denklemine denktir. Burada

$$756 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7,$$



Şekil 4: Yeni diyametreleri ile hiperbol

dolayısıyla denklem (7),

$$\left(\frac{x-3}{\sqrt{21}}\right)^2 - \left(\frac{7(y-2) + (x-3)}{6\sqrt{21}}\right)^2 = 1 \quad (8)$$

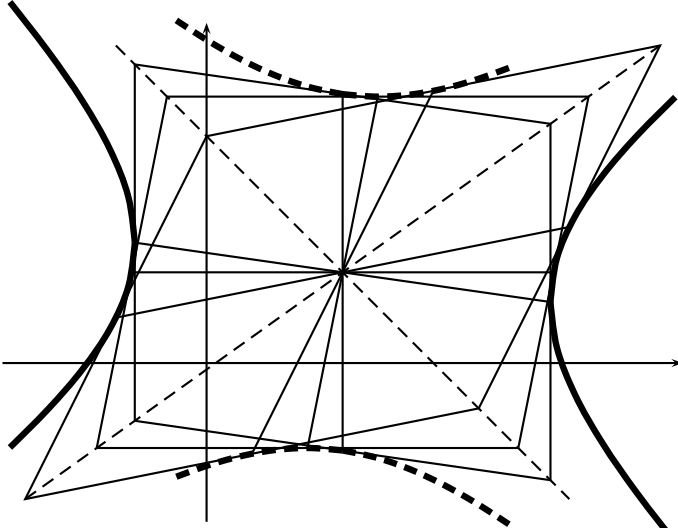
biçiminde yazılabilir. Buradan elde edilen köşeler,

$$\left(3, 2 \pm \frac{6\sqrt{21}}{7}\right), \quad \left(3 \pm \sqrt{21}, 2 \mp \frac{\sqrt{21}}{7}\right)$$

olur, ve her şey, Şekil 4'teki gibidir.

Denklem (1), (2), (5), ve (8)'in her biri aynı hiperbolü tanımlar, ve bu hiperbol, Şekil 1, 3, ve 4'ün her birinde gözüküyor. Hiperbolün her denklemi, farklı bir bilgi verir. Aslında denklem (1), (5), ve (8)'in her biri, farklı eşlenik diyametreler gösterir. Bunlar (ve bunlar tarafından belirtilen paralelkenarlar, ve hiperbole eşlenik hiperbol) Şekil 5'tedir.

Hiperbolün yerine bir elips kullanabiliriz:



Şekil 5: Bulduğumuz her paralelkenar ile hiperbol

- Şekil 6'dan

$$\left(\frac{2(x-3) - (y-2)}{9} \right)^2 + \left(\frac{(x-3) - 5(y-2)}{18} \right)^2 = 1, \quad (9)$$

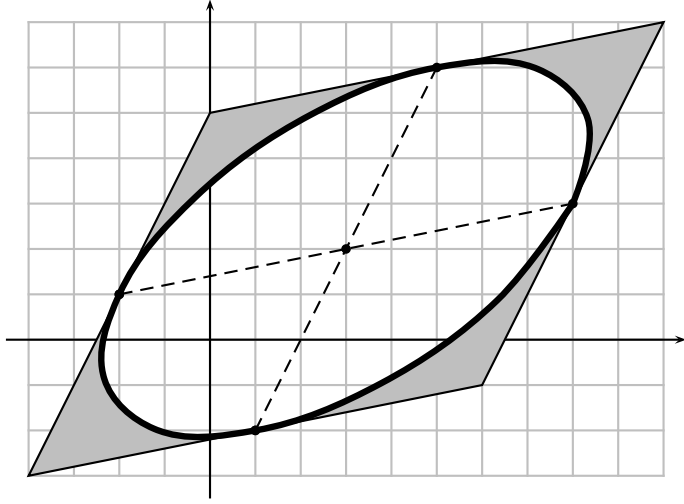
- denklem (9)'dan

$$17x^2 - 26xy + 29y^2 - 50x - 38y - 211 = 0, \quad (10)$$

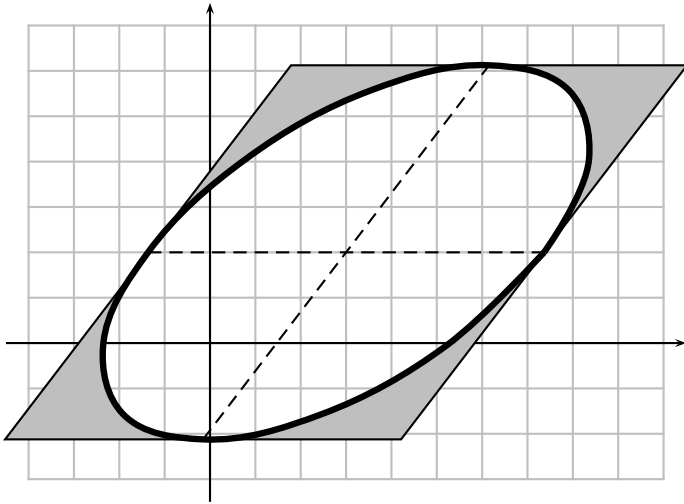
- denklem (10)'dan

$$\left(\frac{17(x-3) - 13(y-2)}{18\sqrt{17}} \right)^2 + \left(\frac{y-2}{\sqrt{17}} \right)^2 = 1, \quad (11)$$

- denklem (10)'dan Şekil 7 elde edilir.



Şekil 6: Elips



Şekil 7: Aynı elips