

Analitik Geometri

Alıştırma

David Pierce

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi

Matematik Bölümü

mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

polytropy.com/

analitik-geometri-ozeti.html

Nisan 2020

Burası 9-adımlı bir alıştırmaadır. Her adımda bir örnek veriyorum; bunlardan sonra daha fazla örnekler veriyorum; kendi örneklerinizi de yazmanızı istiyorum.

Aslında bu alıştırma bir projedir, ve projenin iki kısmı vardır:

I. Önce bir alıştırma yaratmak.

II. Sonra alıştırmanıı çözmek.

Yaratılacak alıştırma, bulmaca veya Sudoku gibi düşünülebilir. Ama alıştırmanın matematik anlamı da vardır.

Genel iki-değişkenli, derecesi iki olan denklem, sayfa 9'daki denklem (5)'tir; özel bir durumu, denklem (6)'dır. Bunun gibi

bir denklem verilirse, aşağıdaki sorular cevaplanabilir.

1. Denklem aşıkâr değilse, koni kesitleri çeşitlerinden (yani elips, hiperbol, ve parabolden) hangisini tanımlar?
2. a) Eğrinin merkezi varsa (yani eğri elips veya hiperbol ise), biri yatay (veya dikey) olan kesitin eşlenik diyametreleri nedir? Verdiğim örneğin böyle diyametreleri, sayfa 11'deki denklem (7)'de gözüktüyor.
b) Eğrinin merkezi yoksa, kesitin yatay (veya dikey) olan kirişlerini ikiye bölen diyametresi nedir? (Aslında bu notlarda parabol yoktur; yeni bir proje için okur parabolleri inceleyebilir.)

Şimdi sayfa 12'deki Şekil 3'teki gibi koniğin grafiği kolaylıkla çizilebilir.

3. Koniğin **eksenleri** (birbirine dik olan diyametreleri) nedir? Bunlar sayfa 18'deki Şekil 6'daki görünür.

$\mathbb{R}$ üzerinde çalışacağız, dolayısıyla analiz kullanılabilir. Aslında saf cebir kullanacağız, çünkü sadece

- $\mathbb{R}$ 'nin sıralı bir cisim,
- $\mathbb{R}$ 'nin her pozitif elemanının bir kare

olduğunu kullanacağız.

Hem Öklid düzlemi, hem bu düzlemin vektörlerinin uzayı olarak $\mathbb{R}^2$ kümesini alacağız. Özellikle

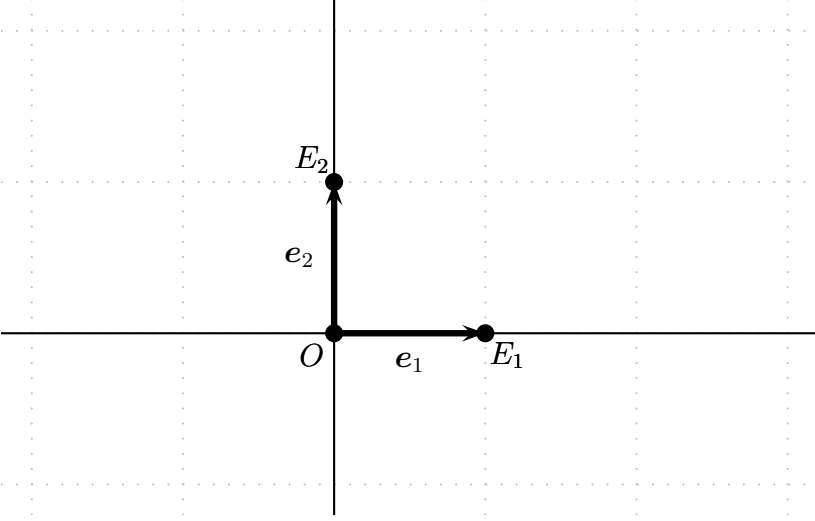
- nokta olarak $(0, 0)$, O ;
- vektör olarak $(1, 0)$, e_1 ;
- vektör olarak $(0, 1)$, e_2

olsun. Ayrıca

$$O + e_1 = E_1,$$

$$O + e_2 = E_2$$

olsun. (O, e_1, e_2) koordinatlar sisteminde çalışarak alıştırma-
lar yaratıp çözeceğiz. Sistemde OE_1 “ x -ekseni,” OE_2 “ y -ekseni”
olur. Şekil 1'e bakın.



Şekil 1: Koordinatlar sistemi

Bu notların örnekleri için hesapları ya kafamda ya da kalem kağıtla yaptım. Kontrol etmek için bazen bir hesap makinesi, WolframAlpha'yı¹ bile kullandım. Kontrol önemlidir çünkü (benim için) hata yapmak kolaydır. Koni kesitlerinin eksenlerini bulan bir yazılım bilmiyorum. Eğer böyle bir yazılım bulursanız veya yazarsanız, bana söyleyin! Ama bir bilgisayar hiçbir şey bilmez. Amacımız kendimizin bilmesidir.

Alıştırmanımız, genel bir şekilde çözülebilir. Aslında

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad D = (c - a)^2 + b^2$$

olsun, ve denklem (5)'te $\Delta \neq 0$ ve $a \neq 0$ olsun. O zaman

¹www.wolframalpha.com/calculators/equation-solver-calculator/

denklem, merkezli bir konik tanımlar, ve merkez,

$$\left(\frac{2cd - be}{\Delta}, \frac{2ae - bd}{\Delta} \right)$$

olur, ve bu nokta (h, k) olduğunda koniğin eksenleri,

$$b(y - k) = (c - a \pm \sqrt{D})(x - h)$$

tarafından tanımlanır, ve koniğin kendisi

$$\begin{aligned} & \left(\frac{c}{2} + \frac{b^2 + 2c(c - a)}{4\sqrt{D}} \right) ((c - a + \sqrt{D})(x - h) - b(y - k))^2 \\ & + \left(\frac{c}{2} - \frac{b^2 + 2c(c - a)}{4\sqrt{D}} \right) ((c - a - \sqrt{D})(x - h) - b(y - k))^2 \\ & = b^2 \left(\frac{d^2}{4a} - \frac{(2ae - bd)^2}{4a\Delta} - f \right) \quad (1) \end{aligned}$$

tarafından tanımlanır. Bunu gösterebiliriz, ama eğer denklem (5)'in katsayılarının yerine kesin tamsayılar konulursa, tanımlanan koni kesitinin eksenlerini gösteren denklemi doğrudan doğruya elde etmek, genel denklem (1)'i kullanmaktan daha kolay olabilir.

Bu notların dizgisi için L^AT_EX yazılımını kullanıyorum. Şekiller için `pstricks` ve `pst-eucl` *package*'lerini kullanıyorum. Bunlarla grafik çizmek de bir kontrol olabilir.

Maalesef işimiz için Pergeli Apollonius'un *Conica* adlı eserinden başka bir kaynak bilmiyorum [1, 2]. Merkezli bir koniğin dik olmayan diyametreleri 1993 yılında yayımlanmış, "The Central Conic Sections Revisited" adlı bir makalede kullanılıyor [3]. Bazı analitik geometri metinlerinde rastgele koni kesitlerinin eksenlerini bulmak için, koordinat değiştirme yöntemi

veriliyor. Aslında bir ϑ için

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta, \\y &= x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta\end{aligned}$$

koordinat değişikliği ile denklem (5)'in xy terimi kaldırılabilir. Örneğin Matematik Vakfı tarafından yayımlanan, Orta Doğu Teknik Üniversitesi'nde kullanılan, yazarı H. İ. Karakaş olan *Analytic Geometry* metninde bu yöntem veriliyor [6].

Bir makalede *dokuz-noktalı koni kesitini* anlamak için [8], George Salmon'un *A Treatise on Conic Sections* adlı kitabını kullandım [9]. Başka bir makalede Apollonius'un tanımlarından bahsettim [7].

Merkezli bir koni kesitinin eksenlerini bulmak için, Apollonius'un yöntemini kullanacağız. Yöntem, *Conica*'nın ikinci kitabının 47. önermesinde verilir. Yöntemi *ifade* etmek için Descartes'in [4, 5] koordinatlar yöntemini kullanacağız. Descartes Apollonius sayesinde bir koni kesitinin diyametrelerinin birbirine dik olmayabildiğinin farkındadır. Bu notlarda e_1 ve e_2 vektörümüz sadece Adım 6'da (ve sonrasında) birbirine dik ve uzunlukları birbirine eşit olacak.

İçindekiler

I. Yaratmak	6
1. Diyametreler bulmak	6
2. Denklemler yazmak	7
3. Bir denklem ötelemek	9

4. Denklemi açıklamak	9
II. Çözmek	10
5. Yatay diyametreği bulmak	10
6. Çember ile kesmek	12
7. Açı ikiye bölmek	13
8. Eksenleri bulmak	16
9. Kontrol etmek	17
III. Daha fazla örnekler	20
Kaynaklar	27

Kısım I.

Yaratmak

1. Diyametreler bulmak

a ve b ,

- birbirine paralel olmayan,
- e_1 ve e_2 vektörüne paralel olmayan,
- toplamı e_1 vektörüne paralel olmayan,
- koordinatları tamsayı olan

vektörler olduğundan

$$A = O + \mathbf{a}, \quad B = O + \mathbf{b}$$

olsun. OA ve OB doğrusunu tanımlayan denklemler yazılsın.

Örnek. Eğer

$$\mathbf{a} = (5, 1), \quad \mathbf{b} = (2, 4)$$

ise, o zaman OA ve OB ,

$$x - 5y = 0, \quad 2x - y = 0$$

denklemleri tarafından tanımlanır.

2. Denklemler yazmak

Merkezi O olan; OA ve OB , eşlenik diyametreleri olan; A ve B , eşlenik köşeleri olan bir elips ve iki hiperbol vardır. Bu konikleri tanımlayan denklemler yazılsın.

Örnek. Elipsin denklemi

$$\left(\frac{2x - y}{2 \cdot 5 - 1 \cdot 1} \right)^2 + \left(\frac{x - 5y}{1 \cdot 2 - 5 \cdot 4} \right)^2 = 1$$

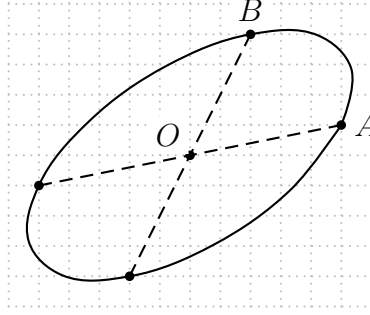
olur, yani

$$\left(\frac{2x - y}{9} \right)^2 + \left(\frac{x - 5y}{18} \right)^2 = 1 \quad (2)$$

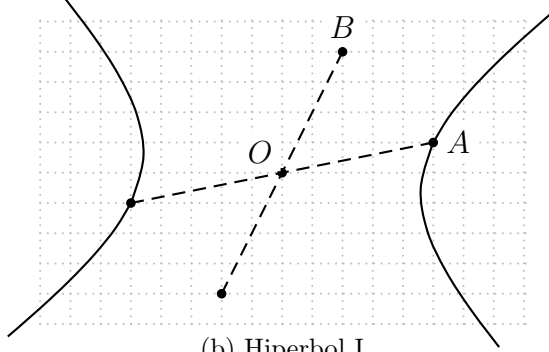
olur. Hiperbollerin denklemleri

$$\begin{aligned} \left(\frac{2x - y}{9} \right)^2 - \left(\frac{x - 5y}{18} \right)^2 &= 1, \\ \left(\frac{x - 5y}{18} \right)^2 - \left(\frac{2x - y}{9} \right)^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3)$$

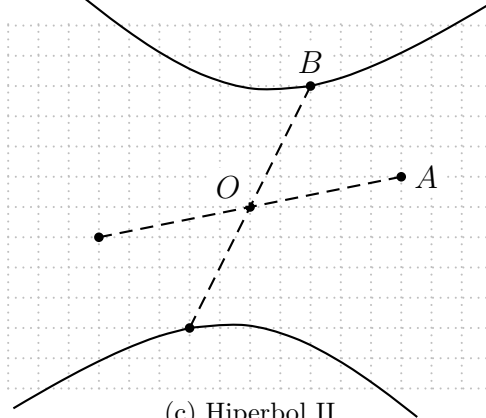
olur. Şekil 2'ye bakın.



(a) Elips



(b) Hiperbol I



(c) Hiperbol II

Şekil 2: Koni kesitleri

3. Bir denklem ötelemek

OE_1 doğrusu, elipsi ve $(\mathbf{a} + \mathbf{b} \nparallel \mathbf{e}_1$ olduğundan) hiperbollerin birini keser. Kesilmiş eğrilerin birini seçin. $\mathbf{0}$ 'dan farklı olan bir $\mathbf{m}$ vektörünü alarak seçtiğiniz eğriyi $\mathbf{m}$ ile öteleyin ve yeni eğrinin denklemini yazın. Koniğin yeni merkezi, M olsun.

Örnek. Eğer

$$\mathbf{m} = (3, 2)$$

ise, o zaman denklem (3)'ten

$$\left(\frac{2(x-3) - (y-2)}{9} \right)^2 - \left(\frac{(x-3) - 5(y-2)}{18} \right)^2 = 1 \quad (4)$$

denklemini elde edilir. (Denklem (2)'den elde edilen denklemi, sayfa 20'deki denklem (13)'tür.)

4. Denklemi açıklamak

Elde edilen denklem, katsayıları aralarında asal tamsayı olan,

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (5)$$

biçiminde yazılsın.

Örnek. Denklem (4),

$$4(2x - y - 4)^2 - (x - 5y + 7)^2 = 18^2$$

olur, dolayısıyla

$$\begin{aligned} 16x^2 - 16xy + 4y^2 - 64x + 32y + 64 \\ - x^2 + 10xy - 25y^2 - 14x + 70y - 49 = 324 \end{aligned}$$

olur, yani

$$15x^2 - 6xy - 21y^2 - 78x + 102y - 309 = 0$$

olur. Bunun katsayılarının en büyük ortak böleni 3 olduğundan hiperbolün denklemi

$$5x^2 - 2xy - 7y^2 - 26x + 34y - 103 = 0 \quad (6)$$

olur.

Kısım II. Çözmek

5. Yatay diyametreyi bulmak

Son bulunmuş denklemden, koniği tanımlayan, biri e_1 vektörüne paralel olan eşlenik diyametreleri gösteren bir denklem bulunsun. Ayrıca koniğin e_1 vektörüne paralel olan diyametresindeki V ve V' köşesi ve eşlenik K ve K' köşesi bulunsun.

Örnek. Son denklemi

$$(5x^2 - 2xy - 26x) + (-7y^2 + 34y) = 103$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} & 5 \cdot (5x^2 - 2xy - 26x) \\ &= 5^2x^2 - 2 \cdot 5xy - 2 \cdot 5 \cdot 13x \\ &= (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot (y + 13) \\ &= (5x - y - 13)^2 - (y + 13)^2 \\ &= (5x - y - 13)^2 - y^2 - 26y - 169 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} & -y^2 - 26y + 5 \cdot (-7y^2 + 34y) \\ & = -y^2 - 26y - 35y^2 + 170y \\ & = -(36y^2 - 144y) \\ & = -36(y^2 - 4y) \\ & = -6^2(y - 2)^2 + 144 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$5 \cdot 103 + 169 - 144 = 540 = 6^2 \cdot 15$$

olduğundan, denklem

$$\begin{aligned} (5x - y - 13)^2 - 6^2(y - 2)^2 &= 540, \\ \left(\frac{5x - y - 13}{6\sqrt{15}}\right)^2 - \left(\frac{y - 2}{\sqrt{15}}\right)^2 &= 1, \\ \left(\frac{5(x - 3) - (y - 2)}{6\sqrt{15}}\right)^2 - \left(\frac{y - 2}{\sqrt{15}}\right)^2 &= 1 \end{aligned} \quad (7)$$

olur. O zaman tanımlanan hiperbolün iki eşlenik diyametrosu,

$$y - 2 = 0, \quad (8)$$

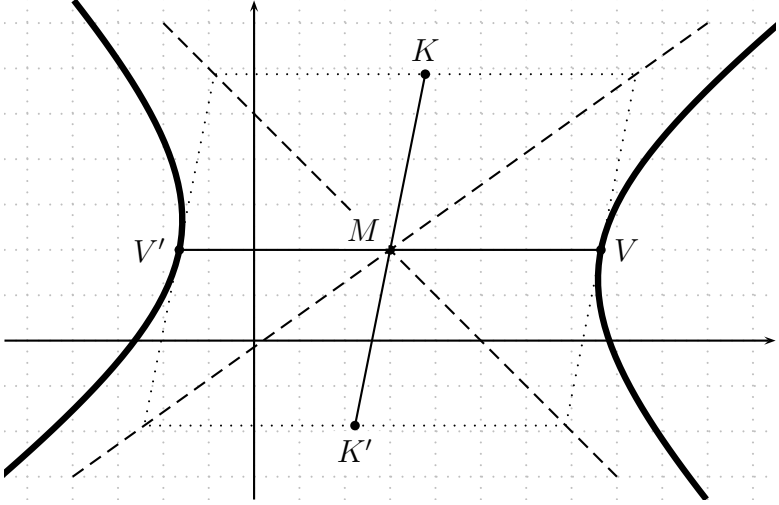
$$5(x - 3) - (y - 2) = 0 \quad (9)$$

denklemleri tarafından tanımlanır. Denklemler (7) ve (8)'den

$$V, V' = \left(3 \pm \frac{6\sqrt{15}}{5}, 2\right);$$

denklem (9) ve

$$\left(\frac{y - 2}{\sqrt{15}}\right)^2 = 1$$



Şekil 3: Eşlenik diyametrelerinin biri yatay olan hiperbol

denkleminde

$$K, K' = \left(3 \pm \frac{\sqrt{15}}{5}, 2 \pm \sqrt{15} \right)$$

çıkar. Şekil 3'e bakın.

6. Çember ile kesmek

Şimdi e_1 ve e_2 birbirine dik olsun, ve uzunlukları birbirine eşit olsun. Merkezi M olan, V 'den geçen çember, koniği MV diyametreğinde olmayan bir W noktasında keser. MW doğrusunu tanımlayan denklemi bulun.

Örnek. Denklem (7)'den çemberin

$$\left(\frac{5(x-3)}{6\sqrt{15}} \right)^2 + \left(\frac{5(y-2)}{6\sqrt{15}} \right)^2 = 1$$

denklemleri elde edilir. Şekil 4'e bakın. Şimdi aşağıdaki denklemleri çözüyoruz:

$$\begin{aligned}(5(x-3) - (y-2))^2 - 36(y-2)^2 &= 25(x-3)^2 + 25(y-2)^2, \\ -2 \cdot 5(x-3)(y-2) &= 60(y-2)^2, \\ (x-3)(y-2) &= -6(y-2)^2.\end{aligned}$$

Son denklem iki doğrunun birleşimini tanımlar. Doğruların biri, denklem (8) tarafından tanımlanmış MV ; diğeri,

$$x - 3 + 6(y - 2) = 0$$

tarafından tanımlanmış MW olur.

7. Açı ikiye bölmek

C noktasının

$$2 \cdot \angle VMC = \angle VMW$$

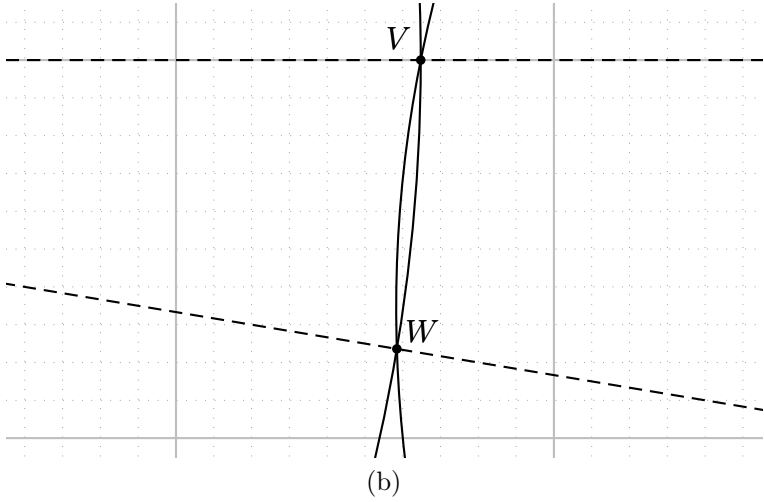
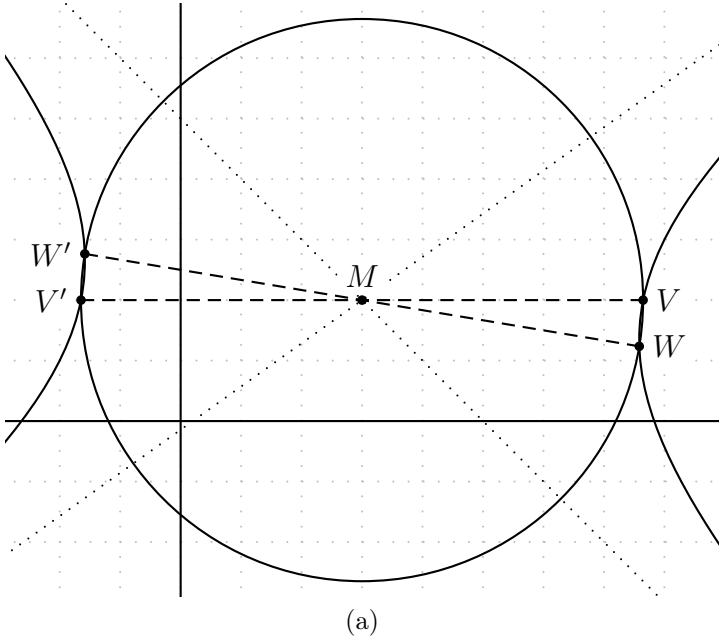
koşulunu sağladığı MC doğrusunu tanımlayan bir denklem bulun. Ayrıca M 'den geçen, MC 'ye dik olan doğrunun denklemini bulun.

Örnek. $\angle VMW = \vartheta$ olduğunda

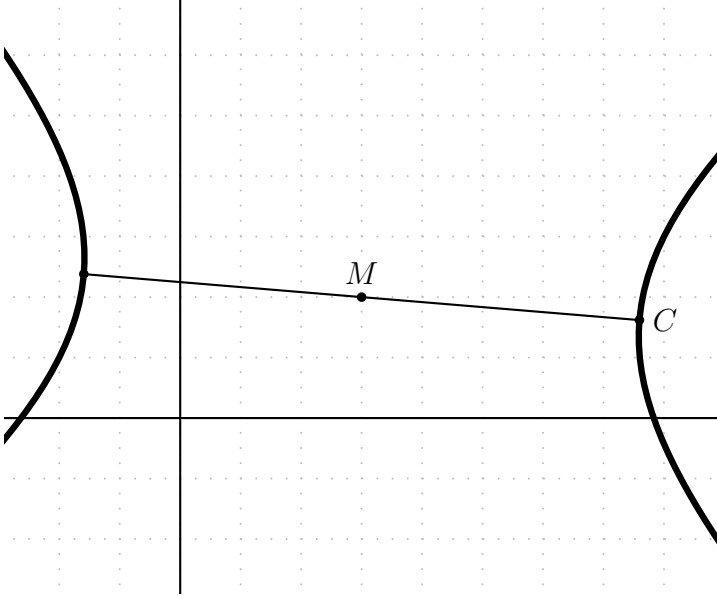
$$\begin{aligned}\frac{-1}{6} &= \tan(2\vartheta) = \frac{2 \tan \vartheta}{1 - \tan^2 \vartheta}, \\ \tan^2 \vartheta - 12 \tan \vartheta - 1 &= 0, \\ \tan \vartheta &= 6 \pm \sqrt{37} = \frac{-1}{6 \mp \sqrt{37}}\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

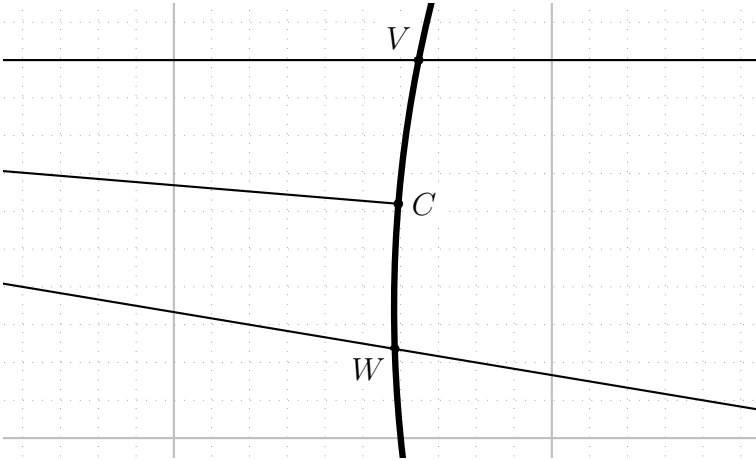
$$x - 3 + (6 + \sqrt{37})(y - 2) = 0 \tag{10}$$



Şekil 4: Hiperbol ve kesen çember



(a)



(b)

Şekil 5: Hiperbol ve eksen

denklemini, MC 'yi tanımlar. Şekil 5'e bakın. Ayrıca M 'den geçen, MC 'ye dik olan doğrunun denklemi,

$$x - 3 + (6 - \sqrt{37})(y - 2) = 0$$

olur.

8. Eksenleri bulmak

Koniği tanımlayan, MC diyametesini ve ona eşlenik olan diyametesini gösteren denklemi yazın.

Örnek. İstenen denklem,

$$\alpha(x - 3 + (6 - \sqrt{37})(y - 2))^2 + \beta(x - 3 + (6 + \sqrt{37})(y - 2))^2 = 1 \quad (11)$$

biçiminde olacak. Ayrıca denklem (11)'in sol parçası, denklem (7)'nin sol parçasına eşittir, dolayısıyla

$$\begin{aligned} \frac{(5(x - 3) - (y - 2))^2}{36 \cdot 15} - \frac{(y - 2)^2}{15} \\ = \alpha(x - 3 + (6 - \sqrt{37})(y - 2))^2 \\ + \beta(x - 3 + (6 + \sqrt{37})(y - 2))^2 \end{aligned}$$

eşitliği, bir özdeşliktir. Özel olarak $(x - 3)^2$ ve $(y - 2)^2$ terimlerinin katsayıları sırasıyla eşittir:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{25}{36 \cdot 15} = \frac{5}{3 \cdot 36}, \\ (6 - \sqrt{37})^2 \alpha + (6 + \sqrt{37})^2 \beta &= \frac{1}{36 \cdot 15} - \frac{1}{15} = \frac{-7}{3 \cdot 36} \end{aligned}$$

olur. Matris biçiminde yazıldığında,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 73 - 12\sqrt{37} & 73 + 12\sqrt{37} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \cdot 36} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

olur, dolayısıyla

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \frac{1}{3 \cdot 36 \cdot 24\sqrt{37}} \begin{pmatrix} 73 + 12\sqrt{37} & -1 \\ -73 + 12\sqrt{37} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 36 \cdot 24\sqrt{37}} \begin{pmatrix} 372 + 60\sqrt{37} \\ -372 + 60\sqrt{37} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6^3\sqrt{37}} \begin{pmatrix} 31 + 5\sqrt{37} \\ -31 + 5\sqrt{37} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur. Böylece istediğimiz denklem,

$$\begin{aligned} &\frac{31 + 5\sqrt{37}}{6\sqrt{37}} \cdot \left(\frac{x - 3 + (6 - \sqrt{37})(y - 2)}{6} \right)^2 \\ &- \frac{31 - 5\sqrt{37}}{6\sqrt{37}} \cdot \left(\frac{x - 3 + (6 + \sqrt{37})(y - 2)}{6} \right)^2 = 1 \quad (12) \end{aligned}$$

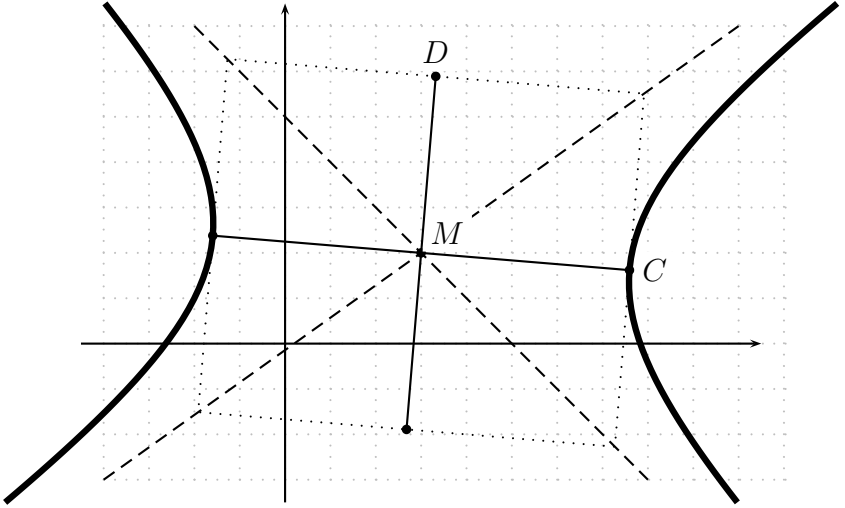
olur. Şekil 6'ya bakın.

9. Kontrol etmek

Son bulunmuş denklemden köşeleri ve (varsa) asimptotları elde ederek kontrol edin.

Örnek. Denklem (12)'ye göre C 'nin koordinatları,

$$\begin{aligned} x - 3 &= (-6 - \sqrt{37})(y - 2), \\ (x - 3 + (6 - \sqrt{37})(y - 2))^2 &= \frac{6^3\sqrt{37}}{31 + 5\sqrt{37}} \end{aligned}$$



Şekil 6: Hiperbol ve eksenleri

sistemini sağlar. Bundan

$$(-2\sqrt{37}(y-2))^2 = \frac{6^3\sqrt{37}}{31+5\sqrt{37}}$$

olur, dolayısıyla

$$(y-2)^2 = \frac{2 \cdot 3^3}{\sqrt{37} \cdot (31+5\sqrt{37})}$$

olur. Bundan

$$\begin{aligned} (y-2)^2 &= \frac{2 \cdot 3^3 \cdot (31-5\sqrt{37})}{\sqrt{37} \cdot (31^2-25 \cdot 37)} \\ &= \frac{2 \cdot 3^3 \cdot (31-5\sqrt{37})}{36\sqrt{37}} \\ &= \frac{3 \cdot (31-5\sqrt{37})}{2\sqrt{37}} \end{aligned}$$

olur, ve ayrıca

$$\begin{aligned}
 (x-3)^2 &= (6+\sqrt{37})^2 \frac{2 \cdot 3^3}{\sqrt{37} \cdot (31+5\sqrt{37})} \\
 &= \frac{2 \cdot 3^3 \cdot (73+12\sqrt{37})(31-5\sqrt{37})}{36\sqrt{37}} \\
 &= \frac{3 \cdot (43+7\sqrt{37})}{2\sqrt{37}}
 \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
 C, C' &= \left(3 \pm \sqrt{\frac{3 \cdot (43+7\sqrt{37})}{2\sqrt{37}}}, 2 \pm \sqrt{\frac{3 \cdot (31-5\sqrt{37})}{2\sqrt{37}}} \right) \\
 &\approx (3 \pm 4.59, 2 \pm 0.38)
 \end{aligned}$$

olur. Benzer bir şekilde eşlenik diyametre DD' olduğunda

$$\begin{aligned}
 D, D' &= \left(3 \pm \sqrt{\frac{3 \cdot (43-7\sqrt{37})}{2\sqrt{37}}}, 2 \pm \sqrt{\frac{3 \cdot (31+5\sqrt{37})}{2\sqrt{37}}} \right) \\
 &\approx (3 \pm 0.32, 3 \pm 3.89)
 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca denklem (12)'den hiperbolün asimptotları,

$$\begin{aligned}
 (31+5\sqrt{37}) \cdot (x+6y-15-\sqrt{37} \cdot (y-2))^2 \\
 = (31-5\sqrt{37}) \cdot (x+6y-15+\sqrt{37} \cdot (y-2))^2
 \end{aligned}$$

denklemini tarafından tanımlanır, dolayısıyla

$$\begin{aligned}
 5((x+6y-15)^2 + 37 \cdot (y-2)^2) \\
 = 2 \cdot 31(x+6y-15)(y-2)
 \end{aligned}$$

tarafından. Burada

$$\begin{aligned} & (x + 6y - 15)^2 + 37 \cdot (y - 2)^2 \\ &= x^2 + 12xy + 36y^2 - 30x - 180y + 225 + 37y^2 - 148y + 148 \\ &= x^2 + 12xy + 73y^2 - 30x - 328y + 373 \end{aligned}$$

olur, ve ayrıca

$$(x + 6y - 15)(y - 2) = xy + 6y^2 - 2x - 27y + 30$$

olur, dolayısıyla asimptotların denklemi

$$\begin{aligned} 0 &= 5(x^2 + 12xy + 73y^2 - 30x - 328y + 373) \\ &\quad - 62(xy + 6y^2 - 2x - 27y + 30) \\ &= 5x^2 - 2xy - 7y^2 - 26x + 34y + 5 \end{aligned}$$

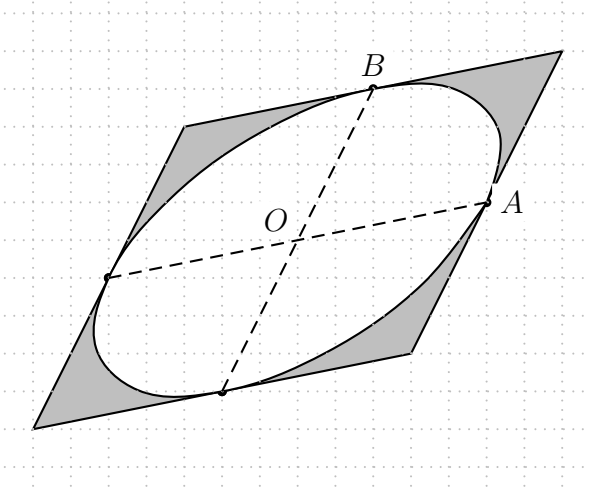
olur. Burada sabit olmayan terimlerin katsayıları, denklem (6)'daki gibidir.

Kısım III.

Daha fazla örnekler

Örnek. Denklem (2)'nin tanımladığı elips, şimdi Şekil 7'dedir. Denklem (4)'ün yerine ötelenmiş elipsi tanımlayan

$$\left(\frac{2(x - 3) - (y - 2)}{9} \right)^2 + \left(\frac{(x - 3) - 5(y - 2)}{18} \right)^2 = 1 \quad (13)$$



Şekil 7: $(4x - 2y)^2 + (x - 5y)2 = 1$

denkleminde

$$\begin{aligned}
 324 &= 18^2 = 4(2x - y - 4)^2 + (x - 5y + 7)^2 \\
 &= 16x^2 - 16xy + 4y^2 - 64x + 32y + 64 \\
 &\quad + x^2 - 10xy + 25y^2 + 14x - 70y + 49 \\
 &= 17x^2 - 26xy + 29y^2 - 50x - 38y + 113
 \end{aligned}$$

denklemini, ve bundan

$$17x^2 - 26xy + 29y^2 - 50x - 38y - 211 = 0$$

denklemini, elde ederiz. Ayrıca

$$\begin{aligned}
 &17(17x^2 - 26xy - 50x) \\
 &= (17x - 13y - 25)^2 - (13y + 25)^2 \\
 &= (17x - 13y - 25)^2 - 169y^2 - 650y - 625
 \end{aligned}$$

olur, ve

$$\begin{aligned} & -169y^2 - 650y + 17(29y^2 - 38y) \\ &= (493 - 169)y^2 - (650 + 646)y \\ &= 324y^2 - 1296y \\ &= 324(y^2 - 4y) \\ &= 18^2((y - 2)^2 - 4) \end{aligned}$$

olur, ve

$$\begin{aligned} & 17 \cdot 211 + 625 + 4 \cdot 18^2 \\ &= 3587 + 625 + 4 \cdot 18^2 \\ &= 4212 + 4 \cdot 18^2 \\ &= 13 \cdot 18^2 + 4 \cdot 18^2 = 17 \cdot 18^2 \end{aligned}$$

olur, dolayısıyla aynı elips,

$$\left(\frac{17x - 13y - 25}{18\sqrt{17}} \right) + \left(\frac{y - 2}{\sqrt{17}} \right) = 1$$

veya

$$\left(\frac{17(x - 3) - 13(y - 2)}{18\sqrt{17}} \right)^2 + \left(\frac{y - 2}{\sqrt{17}} \right)^2 = 1$$

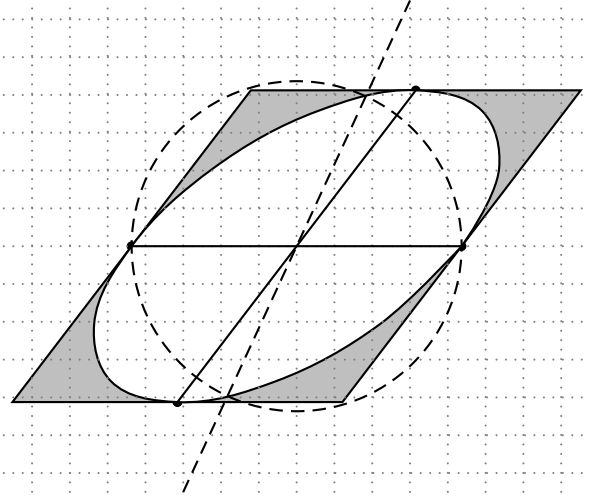
denklemini tarafından tanımlanır. Merkezi orijine ötelenmiş olan elips,

$$\left(\frac{17x - 13y}{18\sqrt{17}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{17}} \right)^2 = 1$$

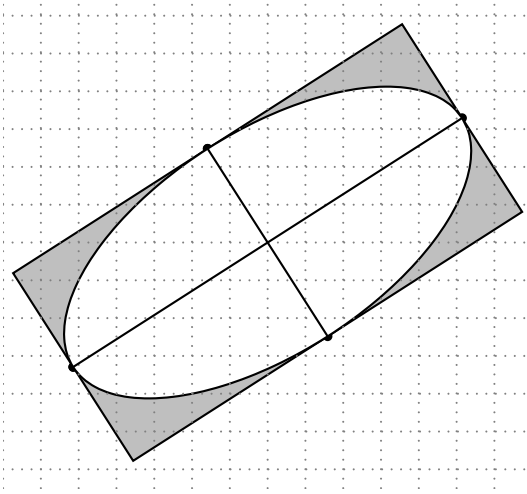
veya

$$(17x - 13y)^2 + (18y)^2 = 17 \cdot 18^2 \quad (14)$$

denklemini tarafından tanımlanır. Şekil 8'e bakın. Aynı yatay



(a) Denklem (14)



(b) Denklem (15)

Şekil 8: Aynı elips, farklı diyametreler

diyametreyi paylaşan çember,

$$(17x)^2 + (17y)^2 = 17 \cdot 18^2$$

denklemini tarafından tanımlanır. Diğer ortak diyametre,

$$2 \cdot 17 \cdot 13x = (13^2 + 18^2 - 17^2)y = 204 = 12 \cdot 17$$

veya

$$13x = 6y$$

tarafından tanımlanır. Şimdi

$$\begin{aligned} \frac{13}{6} &= \tan(2\vartheta) = \frac{2 \tan \vartheta}{1 - \tan^2 \vartheta}, \\ 13 \tan^2 \vartheta + 12 \tan \vartheta - 13, \\ \tan \vartheta &= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 + 13^2}}{13} = \frac{-6 \pm \sqrt{205}}{13} \end{aligned}$$

hesaplamalarından

$$(-6 \pm \sqrt{205})x = 13y$$

denklemlerinin elipsin eksenlerini tanımladığını biliyoruz, dolayısıyla elipsin denklemini,

$$\alpha((6 + \sqrt{205})x + 13y)^2 + \beta((6 - \sqrt{205})x + 13y)^2 = 17 \cdot 18^2$$

biçiminde yazabiliriz. Ayrıca

$$(6 \pm \sqrt{205})^2 = 241 \pm 12\sqrt{205},$$

dolayısıyla denklem (14)'ten

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 241 + 12\sqrt{205} & 13^2 \\ 241 - 12\sqrt{205} & 13^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17^2 & 13^2 + 18^2 \end{pmatrix}.$$

Ayrıca

$$13^2 + 18^2 = 493 = 17 \cdot 29$$

olur, ve sonuç olarak

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \frac{17}{24 \cdot 13^2 \sqrt{205}} \begin{pmatrix} 13^2 & -241 + 12\sqrt{205} \\ -13^2 & 241 + 12\sqrt{205} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 29 \end{pmatrix} \\ &= \frac{17}{24 \cdot 13^2 \sqrt{205}} \begin{pmatrix} 169 \cdot 17 - 241 \cdot 29 + 12 \cdot 29\sqrt{205} \\ -169 \cdot 17 + 241 \cdot 29 + 12 \cdot 29\sqrt{205} \end{pmatrix} \\ &= \frac{17}{24 \cdot 13^2 \sqrt{205}} \begin{pmatrix} 2873 - 6989 + 12 \cdot 29\sqrt{205} \\ -2873 + 6989 + 12 \cdot 29\sqrt{205} \end{pmatrix} \\ &= \frac{17}{24 \cdot 13^2 \sqrt{205}} \begin{pmatrix} -4116 + 12 \cdot 29\sqrt{205} \\ 4116 + 12 \cdot 29\sqrt{205} \end{pmatrix} \\ &= \frac{17}{2 \cdot 13^2 \sqrt{205}} \begin{pmatrix} -7^3 + 29\sqrt{205} \\ 7^3 + 29\sqrt{205} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Elipsin denklemi,

$$\begin{aligned} &(-7^3 + 29\sqrt{205})((6 + \sqrt{205})x + 13y)^2 \\ &\quad + (7^3 + 29\sqrt{205})((6 - \sqrt{205})x + 13y)^2 \\ &= 2 \cdot 18^2 \cdot 13^2 \sqrt{205} \quad (15) \end{aligned}$$

olur. Köşeler için,

$$\begin{aligned} (\mp 7^3 + 29\sqrt{205})((6 \pm \sqrt{205})x + 13y)^2 &= 2 \cdot 18^2 \cdot 13^2 \sqrt{205}, \\ (6 \mp \sqrt{205})x + 13y &= 0 \end{aligned}$$

sistemini çözüyoruz. Burada

$$\begin{aligned} (\mp 7^3 + 29\sqrt{205})(2x\sqrt{205})^2 &= 2 \cdot 18^2 \cdot 13^2 \sqrt{205}, \\ x^2 &= \frac{2 \cdot 9^2 \cdot 13^2}{\sqrt{205} \cdot (29\sqrt{205} \mp 7^3)}, \end{aligned}$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{241 \mp 12\sqrt{205}}{13^2} \cdot \frac{2 \cdot 9^2 \cdot 13^2}{\sqrt{205} \cdot (29\sqrt{205} \mp 7^3)} \\ &= \frac{2 \cdot 9^2 \cdot (241 \mp 12\sqrt{205})}{\sqrt{205} \cdot (29\sqrt{205} \mp 7^3)} \\ &= \frac{2 \cdot 9^2 \cdot (241 \mp 12\sqrt{205})(29\sqrt{205} \pm 7^3)}{\sqrt{205} \cdot (29^2 \cdot 205 - 7^6)}. \end{aligned}$$

Burada

$$29^2 \cdot 205 - 7^6 = 54756 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 13^2$$

ve

$$\begin{aligned} & (241 \mp 12\sqrt{205})(29\sqrt{205} \pm 7^3) \\ &= (241 \cdot 29 - 12 \cdot 7^3)\sqrt{205} \pm (241 \cdot 7^3 - 12 \cdot 29 \cdot 205) \\ &= 2873\sqrt{205} \pm 11323 \\ &= 13^2(17\sqrt{205} \pm 67), \end{aligned}$$

dolayısıyla

$$y^2 = \frac{17\sqrt{205} \pm 67}{2\sqrt{205}}.$$

Örnek. Bir örnek daha için,

$$\left(\frac{3(x+1) - (y+2)}{7} \right)^2 - \left(\frac{(x+1) + 2(y+2)}{7} \right)^2 = 1$$

ve

$$8x^2 - 10xy - 3y^2 - 4x - 22y - 73 = 0,$$

aynı hiperbolü tanımlar. Ayrıca

$$\left(\frac{3x-y}{7} \right)^2 - \left(\frac{x+2y}{7} \right)^2 = 1, \quad (16)$$

$$\left(\frac{8x-5y}{14\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{y}{2\sqrt{2}} \right)^2 = 1, \quad (17)$$

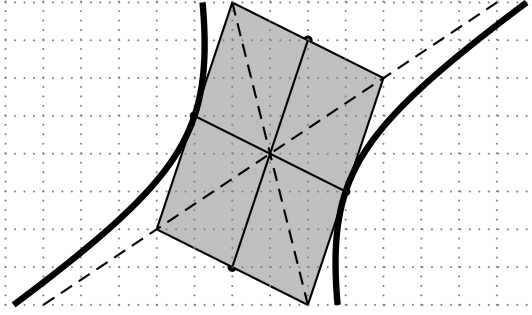
ve

$$\frac{69 + 4\sqrt{221}}{\sqrt{221}} \cdot \left(\frac{10x + (11 - \sqrt{221})y}{70} \right)^2 - \frac{69 - 4\sqrt{221}}{\sqrt{221}} \cdot \left(\frac{10x + (11 + \sqrt{221})y}{70} \right)^2 = 1, \quad (18)$$

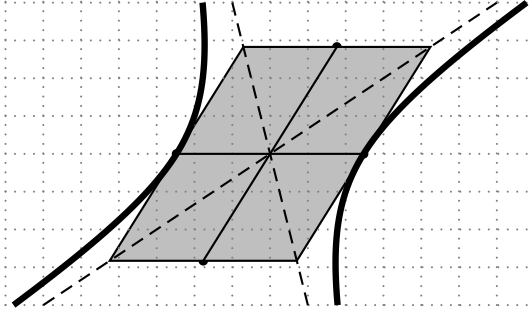
hiperbolün aynı ötelemesini tanımlar. Şekil 9'a bakın.

Kaynaklar

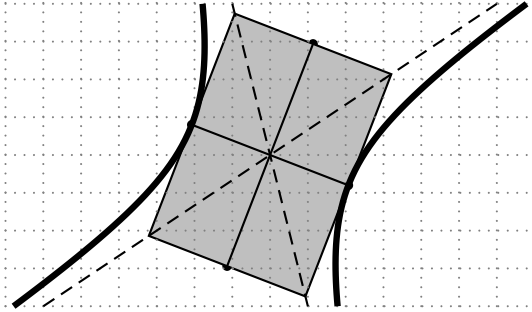
- [1] Apollonius of Perga. *Apollonii Pergaei Quae Graece Exstant Cvm Commentariis Antiquis*, volume I. Teubner, 1974. Edited with Latin interpretation by I. L. Heiberg. First published 1891.
- [2] Apollonius of Perga. *Conics. Books I–III*. Green Lion Press, Santa Fe, NM, revised edition, 1998. Translated and with a note and an appendix by R. Catesby Taliaferro, with a preface by Dana Densmore and William H. Donahue, an introduction by Harvey Flaumenhaft, and diagrams by Donahue, edited by Densmore.
- [3] Ayoub B. Ayoub. The central conic sections revisited. *Mathematics Magazine*, 66(5):322–5, Dec. 1993.
- [4] René Descartes. *The Geometry of René Descartes*. Dover Publications, New York, 1954. Translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham, with a facsimile of the first edition of 1637.
- [5] René Descartes. *La Géométrie*. Jacques Gabay, Sceaux, France, 1991. Reprint of Hermann edition of 1886.
- [6] H. I. Karakaş. *Analytic Geometry*. M ⊕ V [Matematik Vakfı], [Ankara], n.d. [1994].



(a) Denklem (16)



(b) Denklem (17)



(c) Denklem (18)

Şekil 9: Aynı hiperbol, farklı diyametreler

- [7] David Pierce. Abscissas and ordinates. *J. Humanist. Math.*, 5(1):223–264, 2015. scholarship.claremont.edu/jhm/vol5/iss1/14.
- [8] David Pierce. Thales and the nine-point conic. *The De Morgan Gazette*, 8(4):27–78, 2016. education.lms.ac.uk/2016/12/thales-and-the-nine-point-conic/, accessed June 1, 2017.
- [9] George Salmon. *A Treatise on Conic Sections*. Longmans, Green, and Co., London, tenth edition, 1896. archive.org/details/atreatiseonconi09salmgoog, accessed November 25, 2016.