

⑥ Hiperbolüm $\left(\frac{5(x-3)-(y-2)}{6\sqrt{15}}\right)^2 - \left(\frac{y-2}{\sqrt{15}}\right)^2 = 1$ tarafından tanımlanır. Merkezi O' 'ya $(0,0)$ 'a ötelensin; o zaman $\left(\frac{5x-y}{6\sqrt{15}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{15}}\right)^2 = 1$ tarafından tanımlanır, ve $\left(\frac{5x}{6\sqrt{15}}\right)^2 + \left(\frac{5y}{6\sqrt{15}}\right)^2 = 1$ tarafından

tanımlanan çember, hiperbolü yatay diya-metrenin V ve V' uç noktasında keser. İki kesişim noktası (W ve W') daha vardır, ve bunlar, aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$\left(\frac{5x-y}{6\sqrt{15}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{15}}\right)^2 = \left(\frac{5x}{6\sqrt{15}}\right)^2 + \left(\frac{5y}{6\sqrt{15}}\right)^2,$$

$$(5x-y)^2 - 36y^2 = (5x)^2 + (5y)^2,$$

$$25x^2 - 10xy + y^2 - 36y^2 = 25x^2 + 25y^2,$$

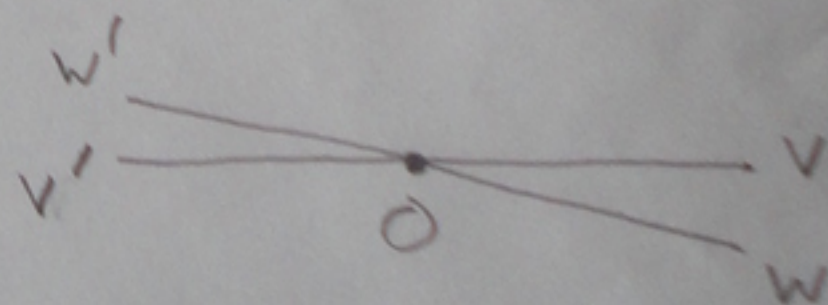
$$0 = 10xy + 60y^2,$$

$$0 = xy + 6y^2 = y(x + 6y).$$

Son denklemler, $y=0$ ve $x+6y=0$ tarafından tanımlanan doğruları tanımlar.

- V ve V' , $y=0$ sağlar;
- W ve W' , $x+6y=0$ sağlar.

⑦ VOW' 'nin açı ortayını bulmak isterim



⑦ devamı. VOW'nin ölçüsü 2θ olsun.

W'W doğrusunun eğimi $-1/6$ olduğundan

$$\tan(2\theta) = \frac{-1}{6}; \text{ ayrıca genelde } \tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

dolayısıyla

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{-1}{6},$$

$$12\tan\theta = \tan^2\theta - 1,$$

$$0 = \tan^2\theta - 12\tan\theta - 1,$$

$$\tan\theta = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 4}}{2} = 6 \pm \sqrt{37}$$

olur. VOW'nin açı ortayının eğimi, $6 - \sqrt{37}$;

VOW' için, açı ortayının eğimi, $6 + \sqrt{37}$.

Böylece hiperbolümün eksenleri,

$$y = (6 - \sqrt{37})x, \quad y = (6 + \sqrt{37})x$$

tarafından tanımlanır. Ayrıca $(6 - \sqrt{37})(6 + \sqrt{37}) = -1$ olduğundan eksenler

$$x + (6 + \sqrt{37})y = 0, \quad x + (6 - \sqrt{37})y = 0$$

tarafından tanımlanır, ve hiperbolün kendisi, bazı γ ve δ için,

$$\left(\frac{x + (6 + \sqrt{37})y}{\gamma} \right)^2 - \left(\frac{x + (6 - \sqrt{37})y}{\delta} \right)^2 = 1$$

tarafından tanımlanır. $\frac{1}{\gamma^2} = \alpha, \quad \frac{-1}{\delta^2} = \beta$ olsun.

⑧ Hiperbolüm hem $\left(\frac{5x-y}{6\sqrt{15}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{15}}\right)^2 = 1$,

hem de $\alpha(x + (6+\sqrt{37})y)^2 + \beta(x + (6-\sqrt{37})y)^2 = 1$ tarafından tanımlanır. Soldaki polinomların sabit terimi olmadığından polinomlar birbirleriyle aynıdır. Özel olarak x^2 terimlerinin katsayıları eşittir, dolayısıyla

$$\left(\frac{5}{6\sqrt{15}}\right)^2 = \alpha + \beta.$$

Aynı şekilde y^2 terimlerinden

$$\left(\frac{1}{6\sqrt{15}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2 = (6+\sqrt{37})^2 \alpha + (6-\sqrt{37})^2 \beta.$$

Ayrıca $\left(\frac{5}{6\sqrt{15}}\right)^2 = \frac{5 \cdot 5}{6^2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{5}{3 \cdot 36}$,

$$\left(\frac{1}{6\sqrt{15}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2 = \frac{1}{36 \cdot 15} - \frac{1}{15} = \frac{-35}{36 \cdot 15} = \frac{-7}{3 \cdot 36},$$

$$(6 \pm \sqrt{37})^2 = 73 \pm 12\sqrt{37}, \text{ dolayısıyla}$$

$$\begin{cases} (73 + 12\sqrt{37})\alpha + (73 - 12\sqrt{37})\beta = -7/3 \cdot 36, \\ \alpha + \beta = 5/3 \cdot 36. \end{cases}$$

olur. Bunu α ve β için çözmek isteriz.

Genelde $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

Ayrıca $ad \neq bc$ olduğunda $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

⑧ devamı. Benim için $ad-bc = 24\sqrt{37}$,
dolayısıyla

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \frac{1}{3 \cdot 36 \cdot 24\sqrt{37}} \begin{pmatrix} 1 & -73 + 12\sqrt{37} \\ -1 & 73 + 12\sqrt{37} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 36 \cdot 24\sqrt{37}} \begin{pmatrix} -7 - 365 + 60\sqrt{37} \\ 7 + 365 + 60\sqrt{37} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 36 \cdot 24\sqrt{37}} \begin{pmatrix} -372 + 60\sqrt{37} \\ 372 + 60\sqrt{37} \end{pmatrix} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Ayrıca $372 = 2 \cdot 186 = 4 \cdot 93 = 12 \cdot 31$,

$3 \cdot 36 \cdot 24 = 12 \cdot 9 \cdot 24 = 12 \cdot 6^3$, dolayısıyla

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{6^3\sqrt{37}} \begin{pmatrix} -31 + 5\sqrt{37} \\ 31 + 5\sqrt{37} \end{pmatrix} \text{ olur, ve}$$

sonuç olarak hiperbolüm

$$\frac{-31 + 5\sqrt{37}}{6^3\sqrt{37}} \left(x + (6 + \sqrt{37})y \right)^2 + \frac{31 + 5\sqrt{37}}{6^3\sqrt{37}} \left(x + (6 - \sqrt{37})y \right)^2 = 1,$$

yani

$$\frac{31 + 5\sqrt{37}}{6\sqrt{37}} \left(\frac{x + (6 - \sqrt{37})y}{6} \right)^2 - \frac{31 - 5\sqrt{37}}{6\sqrt{37}} \left(\frac{x + (6 + \sqrt{37})y}{6} \right)^2 = 1$$

tarafından tanımlanır.

⑨ Kontrol etmek için bir eksenin bir C
uç noktasını hesaplayacağım.

⑨ devamı. Bir durumda

$$\frac{31 + 5\sqrt{37}}{6\sqrt{37}} \left(\frac{x + (6 - \sqrt{37})y}{6} \right)^2 = 1 \wedge x + (6 + \sqrt{37})y = 0$$

dolayısıyla $\frac{31 + 5\sqrt{37}}{6\sqrt{37}} \left(\frac{\sqrt{37}y}{3} \right)^2 = 1,$

$$y^2 = \frac{9}{37} \cdot \frac{6\sqrt{37}}{31 + 5\sqrt{37}}. \text{ Ayrıca } 31^2 = 961 \text{ ve}$$

$$(5\sqrt{37})^2 = 25 \cdot 37 = 925, \text{ dolayısıyla}$$

$$y^2 = \frac{9}{37} \cdot \frac{6\sqrt{37}}{36} (31 - 5\sqrt{37}) = \frac{3(31 - 5\sqrt{37})}{2\sqrt{37}},$$

$$x^2 = (6 + \sqrt{37})^2 y^2 = (73 + 12\sqrt{37}) y^2$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{37}} (31 - 5\sqrt{37})(73 + 12\sqrt{37})$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{37}} (31 \cdot 73 - 60 \cdot 37 + (31 \cdot 12 - 5 \cdot 73) \sqrt{37})$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{37}} (2263 - 2220 + (372 - 365) \sqrt{37})$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{37}} (43 + 7\sqrt{37}) = \frac{129\sqrt{37} + 21 \cdot 37}{2 \cdot 37}$$

$$= \frac{777 + 129\sqrt{37}}{74} \text{ olur.}$$

Şimdi $6^2 = 36 < 37 < 49 = 7^2$ olduğundan

9) devamı ²

$$\frac{777+129 \cdot 6}{74} < x^2 < \frac{777+129 \cdot 7}{74},$$

$$\frac{777+774}{74} < x^2 < \frac{774+903}{74},$$

$$\frac{1551}{74} < x^2 < \frac{1677}{74}$$

$$20 \frac{71}{74} < x^2 < 22 \frac{49}{74}, \quad 4 < |x| < 5.$$

Bundan dolayı hesabım doğru herhalde.

Aslında $C = \left(\sqrt{\frac{777+129\sqrt{37}}{74}}, \sqrt{\frac{93\sqrt{37}-555}{74}} \right),$

ve hesap makinesinden $C \approx (4.59, 0.4).$

Ayrıca $V = \left(\frac{6\sqrt{15}}{5}, 0 \right) \approx (4.64, 0).$

