

Analitik Geometri

Telafi sınavı üzerine

David Pierce

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi

Matematik Bölümü

`mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/
polytropy.com/
analitik-geometri-ozeti.html`

26 Ağustos 2020

Telafi sınavı için size vereceğim

$$ad - bc \neq 0 \tag{1}$$

koşulunu sağlayan a , b , c , ve d için

$$A = (a, b), \quad A' = (-a, -b), \quad B = (c, d), \quad B' = (-c, -d)$$

olsun. O zaman $A'A$ ve $B'B$,

- denklemi

$$(dx - cy)^2 + (bx - ay)^2 = (ad - bc)^2 \tag{2}$$

olan elipsin ve

- denklemi

$$(dx - cy)^2 - (bx - ay)^2 = (ad - bc)^2 \quad (3)$$

olan hiperbolün her birinin, birbirine eşlenik olan diyametrelerinin bir örneğini oluşturur. Eğer ayrıca

$$ac + bd = 0$$

koşulu sağlanırsa, o zaman $A'A$ ve $B'B$, koniğin eksenleri olurlardı, çünkü birbirlerine dik olurlardı; ama vereceğim a , b , c , ve d , koşulu sağlamayacak.

Ödeviniz, denklemi (2) ve (3) olan koniklerin her birinin eksenlerinin uç noktalarını bulmaktır. Bu ödev, final ve bütünleme gibidir, ama şimdi, vereceğim a , b , c , ve d için, hem elipsin hem de hiperbolün eksenlerini bulacaksınız. Elips ve hiperbol, $A'A$ ve $B'B$ eşlenik diyametreleri paylaştığında, eksenlerini paylaşmayacak.

O zaman $\pm$ işaretinin her iki durumunda

$$(dx - cy)^2 \pm (bx - ay)^2 = (\delta x - \gamma y)^2 \pm (\beta x - \alpha y)^2 \quad (4)$$

eşitliğini bir özdeşlik yapan,

$$\alpha\gamma + \beta\delta = 0 \quad (5)$$

denklemini sağlayan α , β , γ , ve δ bulmak zorundasınız. Bu yeter, çünkü (4)'ün sol tarafını açarak

$$\begin{aligned} (dx - cy)^2 \pm (bx - ay)^2 \\ = (d^2 \pm b^2)x^2 - 2(dc \pm ba)xy + (c^2 \pm a^2)y^2 \end{aligned} \quad (6)$$

özdeşliğini elde ederiz, ve ayrıca bunun sağ tarafının katsayılarından (kontrol edebildiğiniz gibi)

$$(d^2 \pm b^2)(c^2 \pm a^2) - (dc \pm ba)^2 = \pm(ad - bc)^2$$

olur, dolayısıyla eğer (4) bir özdeşlik ise, o zaman

$$(ad - bc)^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

olur.

Ödevi çözmek için herhangi bir doğru yöntem kullanabilirsiniz. Zaten verdiğim örneklerde bir yöntem gördük; aşağıdaki kullanacağım yöntem benzerdir. Birini bulabilirsiniz, farklı bir yöntem kullanabilirsiniz, ama her durumda

- çalışmanızın matematiksel doğru olduğu açık olmalıdır;
- bulduğunuz noktaları ya elle ya da bilgisayar ile bir grafiğe koyarak çalışmanızı kontrol etmek zorundasınız.

Örnek

Ya (2) ya da (3) tarafından tanımlanan koniğin eksenlerinin eğimleri, m ve m' olsun. O zaman istediğimiz α , β , γ , ve δ için

$$\beta = m\alpha, \quad \delta = m'\gamma$$

varsayabiliriz. Ayrıca

$$mm' = -1$$

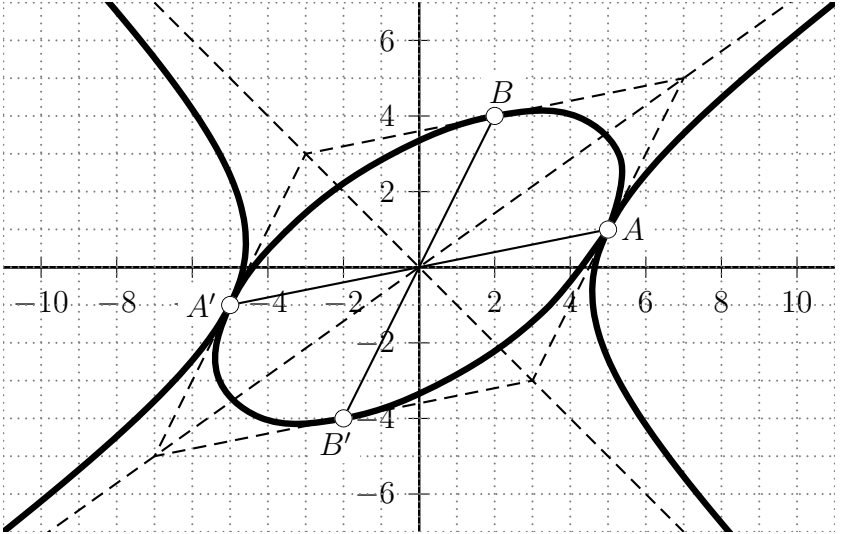
olur, dolayısıyla

$$-\gamma = m\delta$$

olur. Bu durumda (özdeşlik (6)'daki gibi)

$$\begin{aligned}
 & (\delta x - \gamma y)^2 \pm (\beta x - \alpha y)^2 \\
 &= (\delta x + m\delta y)^2 \pm (m\alpha x - \alpha y)^2 \\
 &= (\delta^2 \pm m^2\alpha^2)x^2 + 2m(\delta^2 \mp \alpha^2)xy + (m^2\delta^2 \pm \alpha^2)y^2 \quad (7)
 \end{aligned}$$

özdeşliği vardır. Şimdi Şekil 1'deki gibi



Şekil 1: Elips ve hiperbol

$$A = (a, b) = (5, 1), \quad B = (c, d) = (2, 4)$$

olsun. O zaman

$$ad - bc = 18.$$

Her durumda denklemi

$$(4x - 2y)^2 \pm (x - 5y)^2 = 18^2 \quad (8)$$

olan koniğin eksenlerinin uç noktalarını bulmak isteriz. Bunlar öyle (α, β) ve (γ, δ) ki

$$(4x - 2y)^2 \pm (x - 5y)^2 = (\delta x - \gamma y)^2 \pm (\beta x - \alpha y)^2 \quad (9)$$

eşitliği bir özdeşliktir ve (5) sağlanır.

Elips

+ durumunda denklem (8), Şekil 1’de elipsi tanımlar. Denklemin sol tarafını açarak

$$(4x - 2y)^2 + (x - 5y)^2 = 17x^2 - 26xy + 29y^2 \quad (10)$$

özdeşliğini elde ederiz. Yatay diyametrosini elips ile paylaşan çemberin denklemi,

$$17x^2 + 17y^2 = 18^2 \quad (11)$$

olur. Elips ve çemberin dört ortak noktası

$$17x^2 - 26xy + 29y^2 = 17x^2 + 17y^2$$

denklemini sağlar. Bunu çözerek

$$\begin{aligned} 12y^2 - 26xy &= 0, \\ y(6y - 13x) &= 0, \\ y &= 0 \text{ veya } 6y = 13x \end{aligned}$$

buluruz, dolayısıyla

$$6^2 + 13^2 = 205$$

olduğundan, ortak noktalar denklem (11)'i sağladığından

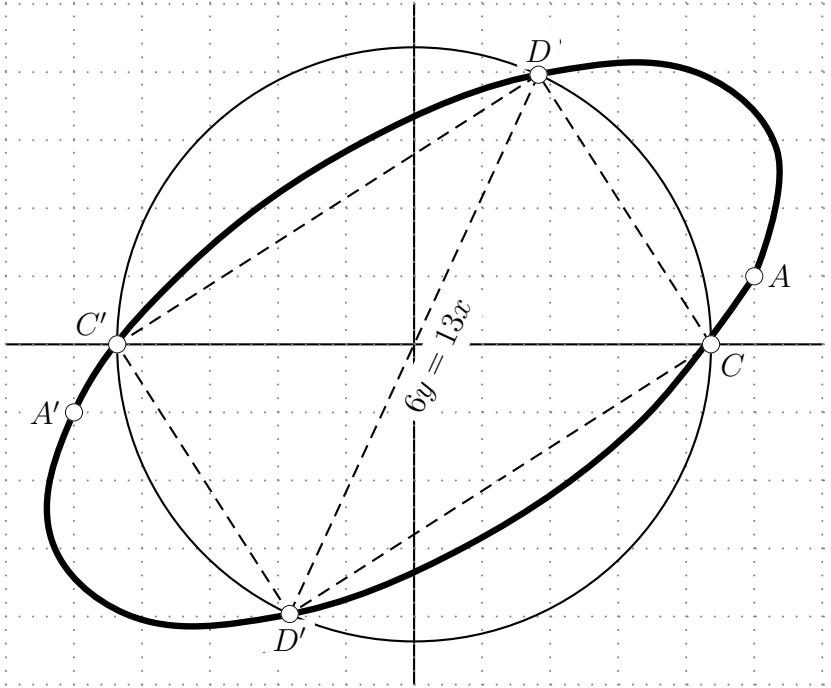
$$\left(\frac{\pm 18\sqrt{17}}{17}, 0 \right),$$

$$\left(\pm 6 \cdot \frac{\sqrt{205}}{205} \cdot \frac{18\sqrt{17}}{17}, \pm 13 \cdot \frac{\sqrt{205}}{205} \cdot \frac{18\sqrt{17}}{17} \right)$$

olur. Bu noktalar

$$(\pm 4.37, 0), \quad (\pm 1.83, \pm 3.96)$$

civarındadır ve Şekil 2'deki gibi C , C' , D , ve D' olur. O za-



Şekil 2: Elips ve çember

man $CDC'D'$ bir dikdörtgendir. Koniğin eksenleri, dikdörtgenin kenarlarına paraleldir. $C'D$ doğrusunun eğimi m , DC doğrusunun m' olduğunda

$$m = \frac{13}{6 + \sqrt{205}} = \frac{6 - \sqrt{205}}{-13} = \frac{-1}{m'},$$

$$m' = \frac{13}{6 - \sqrt{205}} = \frac{6 + \sqrt{205}}{-13} = \frac{-1}{m}$$

olur. Özdeşlik (7), (9), ve (10)'dan

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 + m^2 \alpha^2 &= 17, \\ 2m(\delta^2 - \alpha^2) &= -26, \\ m^2 \delta^2 + \alpha^2 &= 29 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

koşulları çıkar. Birinci ve üçüncü denklemin toplamını ve farkını alarak

$$\left. \begin{aligned} (1 + m^2)(\delta^2 + \alpha^2) &= 46, \\ (1 - m^2)(\delta^2 - \alpha^2) &= -12 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

sistemini elde ederiz. Ayrıca

$$1 \pm m^2 = 1 \mp \frac{m}{m'} = 1 \mp \frac{6 - \sqrt{205}}{6 + \sqrt{205}}$$

olur, dolayısıyla

$$1 + m^2 = \frac{2\sqrt{205}}{6 + \sqrt{205}}, \quad 1 - m^2 = \frac{12}{6 + \sqrt{205}}$$

olur. Bundan sistem (13)'ün ikinci denklemi ve sistem (12)'nin orta denklemi denktir çünkü

$$\frac{2m}{1 - m^2} = \frac{2 \cdot 13}{6 + \sqrt{205}} \cdot \frac{6 + \sqrt{205}}{12} = \frac{26}{12}$$

olur. Böylece sistem (13)'ü çözümler sistem (12)'yi çözeceğiz. Ayrıca sistem (13)

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 + \alpha^2 &= \frac{46}{1+m^2} = 23 \cdot \frac{\sqrt{205+6}}{\sqrt{205}}, \\ \delta^2 - \alpha^2 &= \frac{-12}{1-m^2} = -\sqrt{205} \cdot \frac{\sqrt{205-6}}{\sqrt{205}} \end{aligned} \right\}$$

olur, ve çözümü

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \frac{(\sqrt{205+6})(23-\sqrt{205})}{2\sqrt{205}} = \frac{17\sqrt{205}-67}{2\sqrt{205}}, \\ \alpha^2 &= \frac{(\sqrt{205+6})(23+\sqrt{205})}{2\sqrt{205}} = \frac{29\sqrt{205}+343}{2\sqrt{205}} \end{aligned}$$

olur. Sistem (12)'yi çözmüştük. Ayrıca yukarıdaki gibi $m^2 = -m/m'$ olduğundan

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \frac{(\sqrt{205-6})(23-\sqrt{205})}{2\sqrt{205}} = \frac{29\sqrt{205}-343}{2\sqrt{205}}, \\ \beta^2 &= \frac{(\sqrt{205-6})(23+\sqrt{205})}{2\sqrt{205}} = \frac{17\sqrt{205}+67}{2\sqrt{205}} \end{aligned}$$

olur. Şimdi α ve γ pozitif olsun; o zaman

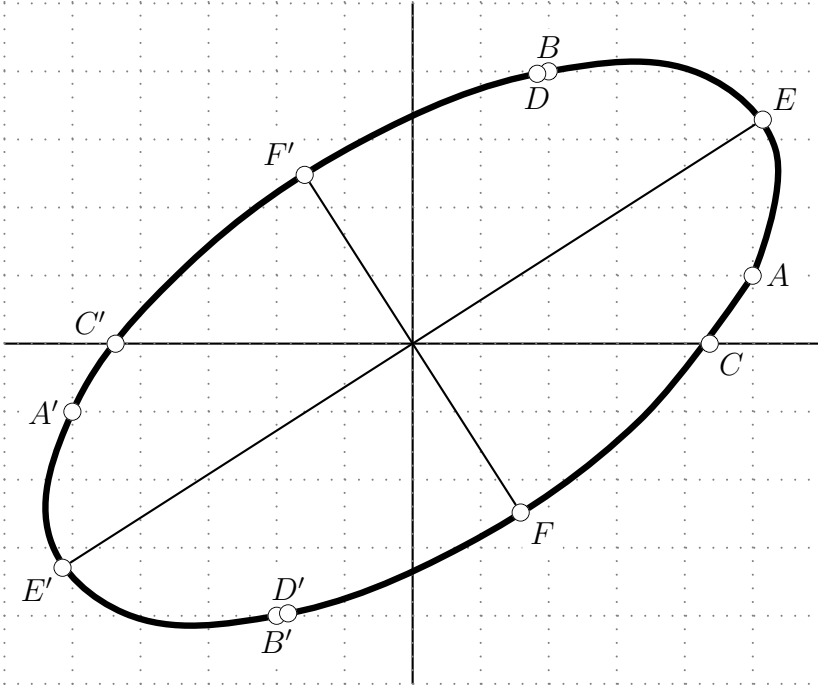
$$(\alpha, \beta) \approx (5.15, 3.29), \quad (\gamma, \delta) \approx (1.59, -2.48)$$

olur. Bu noktalar, Şekil 3'teki gibi E ve F olur, ve oradaki $E'E$ ve $F'F$, elipsin eksenleridir.

Hiperbol

— durumunda denklem (8), Şekil 1'deki hiperbolü tanımlar. Denklemin sol tarafını açarak

$$(4x-2y)^2 - (x-5y)^2 = 15x^2 - 6xy - 21y^2 \quad (14)$$



Şekil 3: Elips ve eksenleri

özdeşliğini elde ederiz. Yatay diyametrosini hiperbol ile paylaşan çemberin denklemi,

$$15x^2 + 15y^2 = 18^2 \quad (15)$$

olur. Elips ve çemberin dört ortak noktası

$$15x^2 - 6xy - 21y^2 = 15x^2 + 15y^2,$$

$$36y^2 + 6xy = 0,$$

$$y(6y + x) = 0$$

denklemini sağlar, dolayısıyla

$$6^2 + 1 = 37$$

olduğundan, ortak noktalar denklem (15)'i sağladığından

$$\left(\frac{\pm 18\sqrt{15}}{15}, 0 \right), \\ \left(\pm 6 \cdot \frac{\sqrt{37}}{37} \cdot \frac{18\sqrt{15}}{15}, \mp \frac{\sqrt{37}}{37} \cdot \frac{18\sqrt{15}}{15} \right)$$

olur. Bu noktalar

$$(\pm 4.65, 0), \quad (\pm 4.58, \mp 0.76)$$

civarındadır ve Şekil 4'teki gibi C , C' , D , ve D' olur. O zaman $CDC'D'$ bir dikdörtgendir. Koniğin eksenleri, dikdörtgenin kenarlarına paraleldir. $C'D$ doğrusunun eğimi m , DC doğrusununki m' olduğunda

$$m = \frac{-1}{6 + \sqrt{37}} = 6 - \sqrt{37} = \frac{-1}{m'}, \\ m' = \frac{-1}{6 - \sqrt{37}} = 6 + \sqrt{37} = \frac{-1}{m}$$

olur. Özdeşlik (7), (9), ve (14)'ten

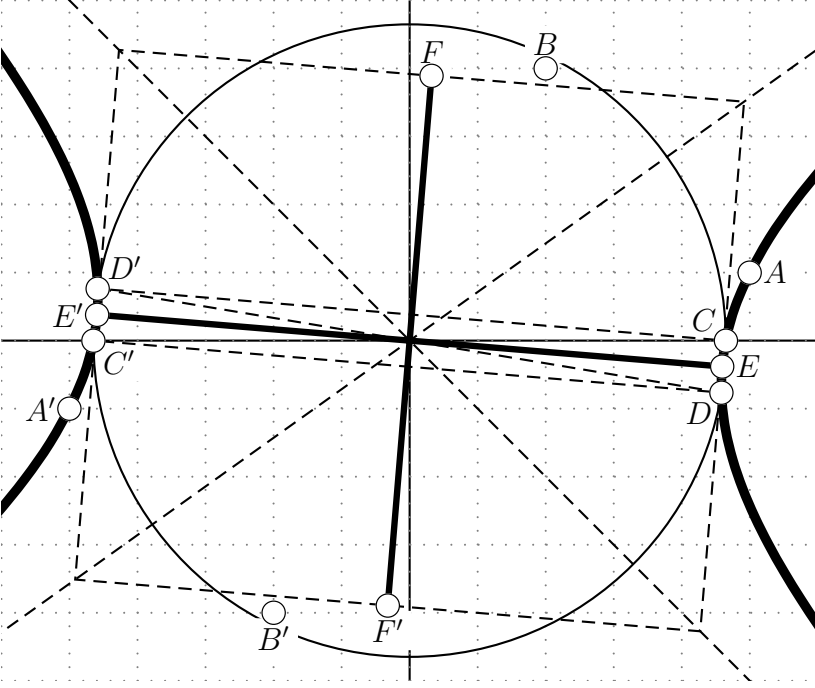
$$\left. \begin{aligned} \delta^2 - m^2 \alpha^2 &= 15, \\ 2m(\delta^2 + \alpha^2) &= -6, \\ m^2 \delta^2 - \alpha^2 &= -21 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

koşulları çıkar. Birinci ve üçüncü denklemden

$$\left. \begin{aligned} (1 + m^2)(\delta^2 - \alpha^2) &= -6, \\ (1 - m^2)(\delta^2 + \alpha^2) &= 36 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

sistemini elde ederiz. Ayrıca

$$1 \pm m^2 = 1 \mp \frac{m}{m'} = 1 \mp \frac{6 - \sqrt{37}}{6 + \sqrt{37}}$$



Şekil 4: Hiperbol ve çember

olur, dolayısıyla

$$1 + m^2 = \frac{2\sqrt{37}}{6 + \sqrt{37}}, \quad 1 - m^2 = \frac{12}{6 + \sqrt{37}}$$

olur. Bundan sistem (17)'nin ikinci denklemi ve sistem (16)'nın orta denklemi denktir çünkü

$$\frac{2m}{1 - m^2} = \frac{-2}{6 + \sqrt{37}} \cdot \frac{6 + \sqrt{37}}{12} = \frac{-2}{12} = \frac{-6}{36}$$

olur. Böylece sistem (17)'yi çözerek sistem (16)'yı çözeceğiz. Ayrıca sistem (17)

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 - \alpha^2 &= \frac{-6}{1 + m^2} = -3 \cdot \frac{\sqrt{37} + 6}{\sqrt{37}}, \\ \delta^2 + \alpha^2 &= \frac{36}{1 - m^2} = 3\sqrt{37} \cdot \frac{\sqrt{37} + 6}{\sqrt{37}} \end{aligned} \right\}$$

olur, ve çözümü

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \frac{3(\sqrt{37} + 6)(\sqrt{37} - 1)}{2\sqrt{37}} = \frac{3(31 + 5\sqrt{37})}{2\sqrt{37}}, \\ \alpha^2 &= \frac{3(\sqrt{37} + 6)(\sqrt{37} + 1)}{2\sqrt{37}} = \frac{3(43 + 7\sqrt{37})}{2\sqrt{37}} \end{aligned}$$

olur. Sistem (16)'yı çözmüştük. Ayrıca yukarıdaki gibi $m^2 = -m/m'$ olduğundan

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \frac{3(\sqrt{37} - 6)(\sqrt{37} - 1)}{2\sqrt{37}} = \frac{3(43 - 7\sqrt{37})}{2\sqrt{37}}, \\ \beta^2 &= \frac{3(\sqrt{37} - 6)(\sqrt{37} + 1)}{2\sqrt{37}} = \frac{3(31 - 5\sqrt{37})}{2\sqrt{37}}. \end{aligned}$$

olur. Şimdi α ve γ pozitif olsun; o zaman

$$(\alpha, \beta) \approx (4.59, -0.38), \quad (\gamma, \delta) \approx (0.32, 3.89)$$

olur. Bu noktalar, Şekil 4'teki E ve F olur, ve oradaki $E'E$ ve $F'F$, hiperbolün eksenleridir.