

Pappus ve Desargues

David Pierce

Matematik Böl., MSGSÜ

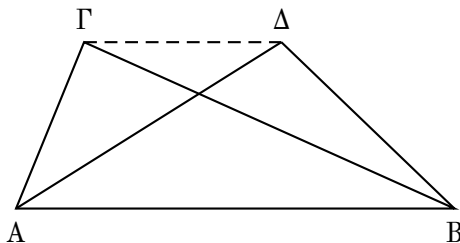
`mat.msgsu.edu.tr/~dpierce`

`polytropy.com`

31 Aralık 2020

Öklid'in *Öğeler*'inin birinci kitabının 37. ve 39. önermesine göre,

$$\triangle AB\Gamma = \triangle ABA\Delta \iff AB \parallel \Gamma\Delta$$



- Bundan *Pappus Teoremi*,
- Pappus Teoremi'nden *Desargues Teoremi*,
- Desargues Teoremi'nden *Thales Teoremi* çıkar.

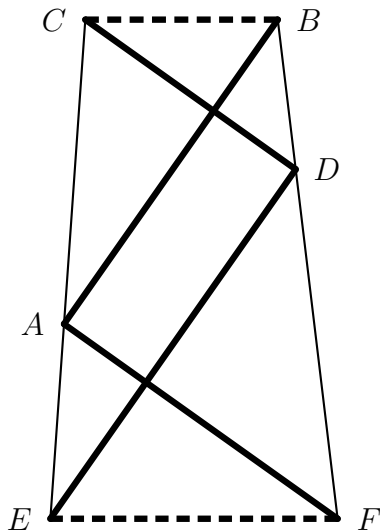
Pappus Teoremi (4. yy.)

Bildirme. Eğer bir altıgenin kenarları iki doğru birleştirirse, ve iki karşıt olmayan kenar, karşıtlarına paralel ise, o zaman kalan kenarlar da paraleldir.

Açıklama. Olsun

- E noktası AC doğrusunda,
- F noktası BD doğrusunda,
- $AB \parallel DE$ ve $CD \parallel FA$.

Belirtme. $BC \parallel EF$ de olur.



Pappus Teoremi

Düzenleme. Çizilsin

$$AD, \quad BE, \quad CF.$$

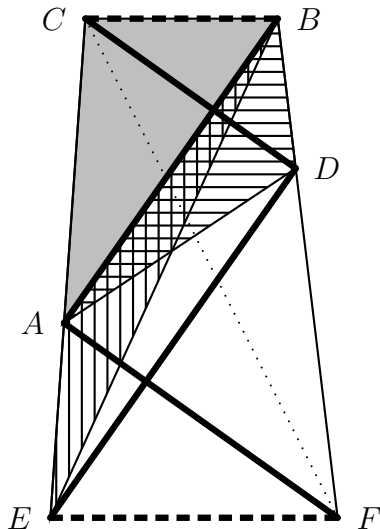
Gösterme. $AB \parallel DE$ olduğundan,
Öklid'in Önerme I.37'si saye-
sinde,

$$BAE = BAD$$

olur. ABC üçgeni eklendiğinde

$$BAE + BCA = BAD + BCA$$

olur, yani $BCE = BCAD$.



Pappus Teoremi

Gösterme devamı. Aynı şekilde
 $AF \parallel DC$ olduğundan

$$DCA = DCF$$

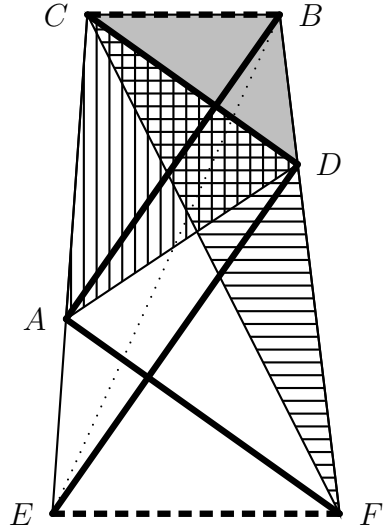
olur. BCD eklendiğinde

$$DCA + BCD = DCF + BCD$$

olur, yani

$$BCAD = BCF.$$

Zaten oldu $BCE = BCAD$.



Pappus Teoremi

Gösterme 2. devamı. Şimdi

$$BCE = BCAD, \quad BCAD = BCF$$

oldu, dolayısıyla

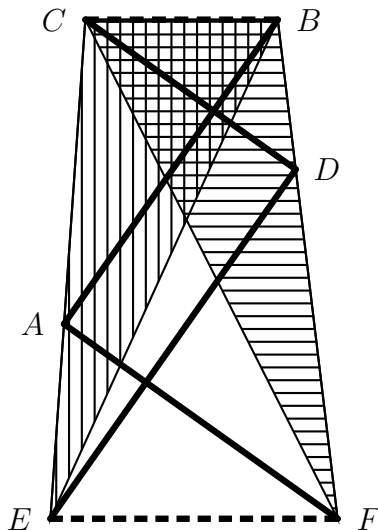
$$BCE = BCF$$

olur. Öklid'in Önerme I.39'u sayesinde, istediğimiz gibi

$$BC \parallel EF$$

olur.

Bitirme ...

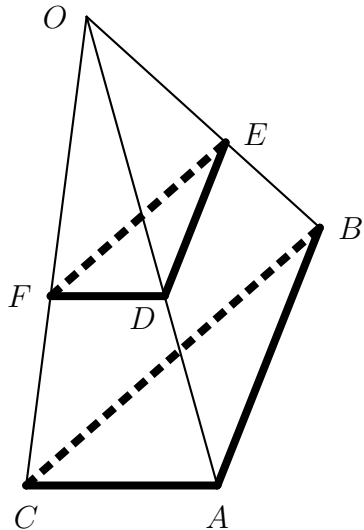


Desargues Theoremi (1648),
Hessenberg'in 1905 kanıtına göre.

Açıklama. Olsun

- D noktası OA doğrusunda,
- E noktası OB doğrusunda,
- F noktası OC doğrusunda,
- $AB \parallel DE$ ve $AC \parallel DF$.

Belirtme. $BC \parallel EF$ de olur.

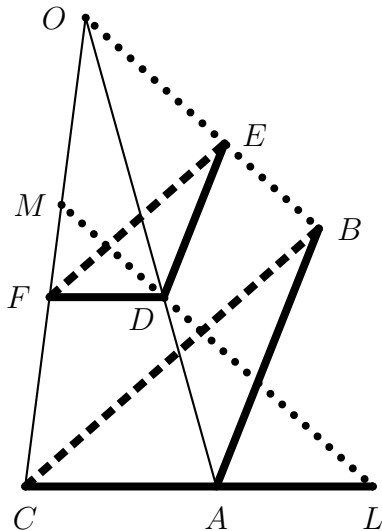


Desargues Theoremi

Düzenleme. Öklid'in Önerme 31'i ile

- D noktasından geçen,
- OB doğrusuna paralel olan,
- L noktası AC doğrusunda olan
- M noktası OC doğrusunda olan

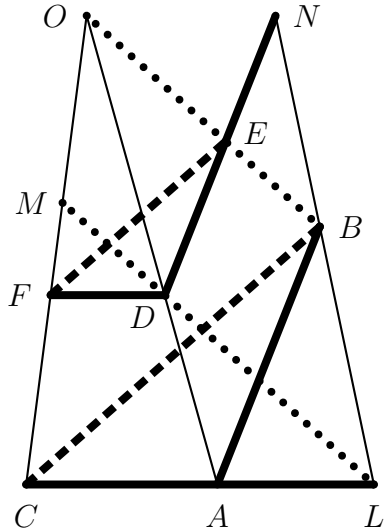
LM doğrusu çizilsin.



Desargues Theoremi

Düzenleme devamı.

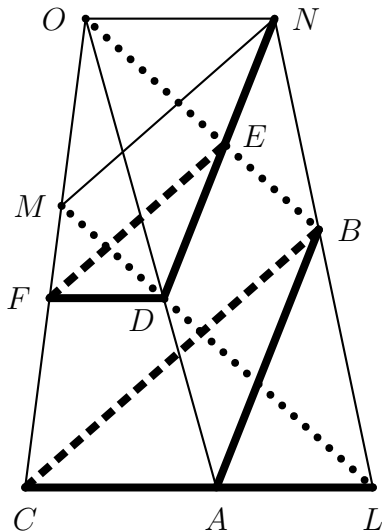
- LB doğrusu,
 - DE doğrusu,
- N noktasında kesişsin.



Desargues Theoremi

Düzenleme 2. devamı.

- ON doğrusu,
 - MN doğrusu,
- çizilsin.



Desargues Theoremi

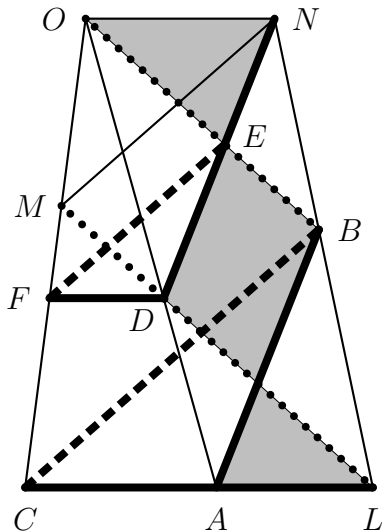
Gösterme. $ABONDL$ altıgeninde,
Pappus Teoremi sayesinde

$$ON \parallel AL$$

olur. Ayrıca AL ve AC doğrusu
aynıdır. Bundan dolayı Öklid'in
Önerme 30'u sayesinde

$$ON \parallel FD$$

olur çünkü $AC \parallel DF$ oldu.

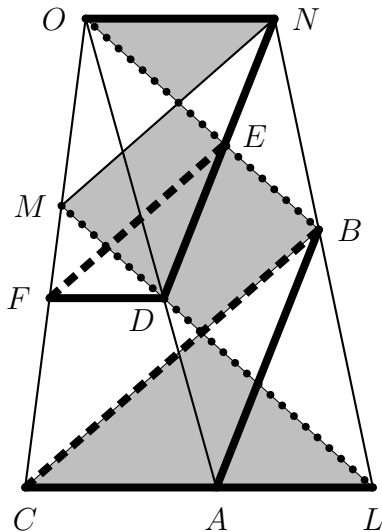


Desargues Theoremi

Gösterme devamı. $CBONML$ altıgeninde, Pappus Teoremi sayesinde

$$MN \parallel CB$$

olur.



Desargues Theoremi

Gösterme 2. devamı. $FEONMD$

altıgeninde, Pappus Teoremi
sayesinde

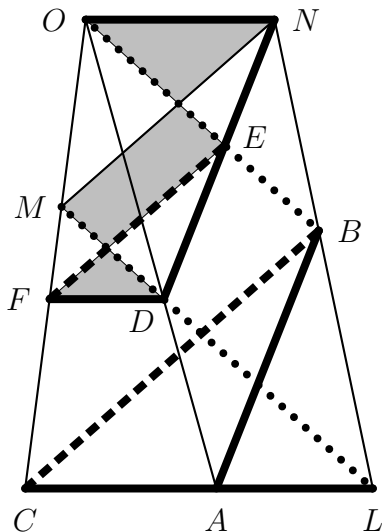
$$MN \parallel FE$$

olur. Zaten $MN \parallel CB$ oldu.
Bundan dolayı istediğimiz gibi

$$CB \parallel FE$$

olur.

Bitirme ...



Oranlar ve orantılar

- OBD bir üçgen,
- A noktası OB doğrusunda,
- C noktası OD doğrusunda,
- $AC \parallel BD$

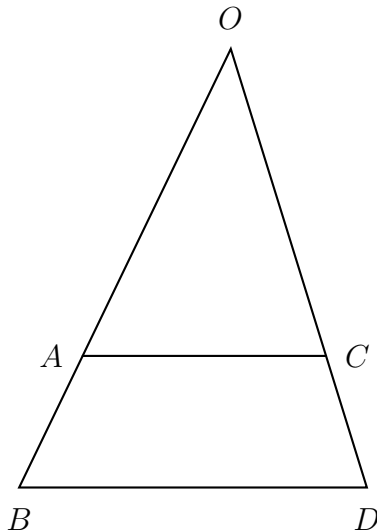
ise, o zaman

$$(O, A, B) \mathcal{R} (O, C, D)$$

yazılsın. Bu durumda

$$(O, C, D) \mathcal{R} (O, A, B)$$

de olur.



Ayrıca

$$(O, A, B) \mathcal{R} (O, A, B)$$

olsun. O zaman $\mathcal{R}$, **yansımali** ve **simetrik** bir bağıntıdır. Desargues Theoremi sayesinde, $\mathcal{R}$ **geçişlidir**, yani

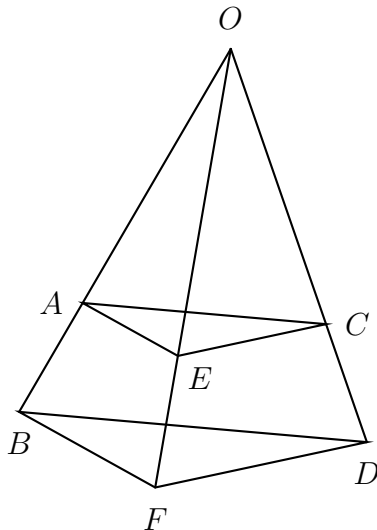
$$(O, A, B) \mathcal{R} (O, C, D),$$

$$(O, A, B) \mathcal{R} (O, E, F)$$

ise, o zaman

$$(O, C, D) \mathcal{R} (O, E, F)$$

de olur. Böylece $\mathcal{R}$, bir **denklik bağıntısıdır**.



$\mathcal{R}$ 'ye göre (O, A, B) üçlüsünün denklik sınıfı

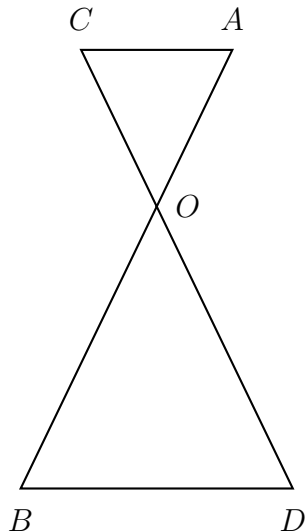
$$\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OB}$$

olarak yazılsın. Bu sınıf, iki paralel yönlendirilmiş doğru parçasının **oranıdır**. İki oranın aynılığı, bir **orantıdır**.

Şimdi **Thales Teoremi** çıkar. Eğer oranların aynılığı $::$ ile gösterilirse, o zaman

$$\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OB} :: \overrightarrow{OC} : \overrightarrow{OD} \iff AC \parallel BD$$

olur.



Thales Teoremi, Öklid'in Önerme VI.2'sidir, ama onu göstermek için Öklid, **Arşimet Aksiyomu**'nu kullanıyor.

Bu aksiyoma göre eğer A , B , ve C , bir doğrunun üç farklı noktası ise, o zaman AB ve BC doğru parçalarının her birinin, diğerdan büyük olan bir katı vardır.

Öğeler'de bu aksiyom, sadece Kitap V'te gözüktüyor.

1898–9 kış döneminin bir dersinde David Hilbert, Arşimet Aksiyomu'nu kullanmadan orantıları tanımlayabilmemizi açıkladı.