

Ordinal Analiz

Aksiyomatik Kümeler Kuramı Dersi

David Pierce

19 Ekim 2021 taslağı

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
İstanbul

`dpierce@msgsu.edu.tr`
`mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/`
`polytropy.com`

İçindekiler

1	Giriş	5
2	Harfler ve Aksiyomlar	16
2.1	Harfler	16
2.2	Aksiyomlar	18
3	Mantık	20
3.1	Kümeler ve Sınıflar	20
3.2	Formüller	21
3.3	Doğruluk ve yanlışlık	26
3.4	Kısaltmalar	26
3.4.1	Yeni bağlayıcılar ve bir niceleyici	26
3.4.2	Fazla ayraçlar	27
3.4.3	Yeni yüklemeler	27
3.4.4	İşlemler	29
3.5	Eşitlik	30
3.5.1	Sonuçlar	32
3.5.2	Sayılar	32
3.6	Bağıntılar	34
4	Doğal sayılar	38
4.1	Tümevarım	38
4.2	Özyineleme	43

5	Ordinal Sayılar	46
5.1	Ordinaller	46
5.2	Tümevarım ve Özyineleme	50
5.3	Normal işlemler	53
5.4	Süreklilik	56
6	Ordinal toplama	57
6.1	Tanım ve özellikler	57
6.2	Hesaplamalar	63
7	Ordinal çarpma	67
7.1	Tanım ve özellikler	67
7.2	Hesaplamalar	72
8	Ordinal kuvvet alma	76
8.1	Tanım ve özellikler	76
8.2	Hesaplamalar	78
9	Kardinaller	80
9.1	Eşlemeler	80
9.2	Kardinaller	81
9.3	Kardinal Toplama ve Çarpma	82
9.4	Sayılamaz kümeler	87
9.5	Seçme	89
10	Kofinallik	91
10.1	Tanım ve özellikler	91
10.2	Hesaplamalar	94

Şekil Listesi

1	Özyineleme	44
2	Ordinal toplama	58
3	$\eta = \omega + \xi$ denkleminin grafiği	60
4	$1 + \omega = \omega < \omega + 1$	63
5	$\eta = \xi + \omega$ denkleminin grafiği	64
6	Ordinal çarpma	68
7	$\eta = \omega \cdot \xi$ denkleminin grafiği	69
8	$2 \cdot \omega = \omega < \omega \cdot 2$	73
9	$\eta = \xi \cdot \omega$ denkleminin grafiği	74
10	$\eta = \omega^\xi$ denkleminin grafiği	77

1 Giriş

Bu kümeler kuramı dersi, gerçel analizin gerçel sayıları incelediği şekilde *ordinal sayıları* inceler. Ordinal sayılar – kısaca *ordinaller* – kümedirler, ve onların özelliklerini, *küme aksiyomlarından* elde edeceğiz. Aslında ordinallerin istediğimiz özelliklere sahip olması için, aksiyomlarını tek tek ifade edeceğiz.

Gerçel sayılar, adı $\mathbb{R}$ olan, doğrusal sıralanmış bir küme oluşturur. Ayrıca iki gerçel sayı verilirse, biri

- diğerine *eklenebilir* ve
- diğerini *çoğaltabilir*.

Bu durumda verilen iki sayı *toplanabilir* ve *çarpılabilir*. Simgelerde her a elemanı için $\mathbb{R}$ 'nin

$$x \mapsto a + x,$$

$$x \mapsto a \cdot x$$

işlemleri vardır, ve bunlar sırasıyla *soldan eklenme* ve *soldan çoğaltmadır*.

Toplama ve çarpma işlemlerinin belirli özellikleri vardır, örneğin ikisi değişmelidir. Ayrıca gerçel sayıların verilen işlemleri ile sıralanması arasında ilişkiler vardır, örneğin

$$a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a + b > 0 \wedge a \cdot b > 0.$$

Bu özellikler ve ilişkiler, *tam sıralanmış cisim* aksiyomları ile ifade edilir. Kısaca $\mathbb{R}$, tam sıralanmış bir cisimdir. Mantık açısından gerçel analizin temeli, bu aksiyomlardır.

Bu temelin yerine gerçel sayılar, bir düzlemde olan sınırlanmamış bir doğrunun noktaları olarak düşünülebilir. Bu şekilde gerçel sayıların sıralamasının, toplamasının, ve çarpmasının geometrik anlamı vardır, ve gerçel analiz, geometrinin bir uzantısıdır.

Örneğin geometride, çemberlerin ve başka koni kesitlerinin teğetleri incelenir. Analitik geometride bu eğrilerin her biri, bazı gerçel A, B, C, D, E , ve F katsayıları için

$$g(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

eşitliği ile g 'nin verildiği

$$g(x, y) = 0$$

denklemini tarafından tanımlanır. Gerçel analizde, g 'nin rastgele iki-konumlu fonksiyon olduğu $g(x, y) = 0$ denklemi tarafından tanımlanmış eğrinin teğetlerinin var olduğu durumlar incelenir. Başlangıçta g, f 'nin tek-konumlu bir fonksiyonu olduğu

$$g(x, y) = y - f(x)$$

eşitliği tarafından tanımlanır. Bu durumda $g(x, y) = 0$ denkleminin tanımladığı eğri, f 'nin grafiğidir, ve eğriyi daha iyi anlamak için bu grafiği çizebiliriz.

Ordinaller için geometri kullanmaya çalışacağız, ama bu her zaman kolay olmadığından aksiyomlar ve mantık önemlidir.

Gerçel sayılar gibi ordinaller de doğrusal sıralanmıştır. Aşağıdaki şekilde ordinalleri elde edebiliriz.

1. Adı *sıfır* olan, 0 ile gösterilen *ilk* ordinal ile başlarız. Bu ordinal, ordinallerin en küçüğüdür.
2. Her α ordinali için α' *ardılı*nı tanımlarız. Verilen bir ordinalin ardılı, o ordinalden daha büyük olan ordinallerin en küçüğüdür.

3. Elemanları ordinal olan her A kümesi için $\sup(A)$ *supremumunu* tanımlarız. Elemanları ordinal olan bir kümenin supremumu, kümenin her elemanı için ya elemana eşit olan ya da elemandan daha büyük olan ordinallerin en küçüğüdür. Üç durum vardır.
- a) Eğer A boş ise, o zaman $\sup(A) = 0$.
 - b) Eğer bir β ordinali, A 'nın en büyük elemanı ise, o zaman $\sup(A) = \beta$.
 - c) Eğer A boş değilse, ama A 'nın en büyük elemanı yoksa, o zaman $\sup(A)$, yeni bir ordinaldir, ve ona A 'nın *limiti* denebilir.

Bu şekilde ordinallerin üç çeşidi vardır.

1. İlk ordinal vardır.
2. Ardıllar vardır.
3. Limitler vardır.

En küçük ordinaller $0, 0', 0'', \dots$ Bunlar *doğal sayılardır* ve normalde $0, 1, 2 \dots$ olarak yazılır. Doğal sayılar, boş olmayan ve en büyük elemanı olmayan bir küme oluşturur. Bundan dolayı doğal sayılar kümesinin limiti vardır. Bu limit, Yunan alfabesinin son harfi olan ω ile gösterilir. Bundan sonra $\omega', \omega'', \omega''' \dots$ vardır.

Ordinallerin küme olacağını söyledik. Her ordinal, kendisinden daha küçük olan ordinallerin oluşturduğu küme olarak tanımlanabilir. Küçük Yunan harfleri, her zaman ordinallerin yerine kullanılacak. Bu şekilde yukarıdaki tanım,

$$\alpha = \{\xi: \xi < \alpha\}$$

eşitliği tarafından ifade edilir. Aşağıdaki gözlemler çıkar.

- Sıfır, boş kümedir:

$$0 = \{\xi: \xi \neq \xi\} = \emptyset.$$

- Bir ordinalin ardılının elemanları, kendi elemanları ve kendisidir:

$$\alpha' = \{\xi: \xi \in \alpha \vee \xi = \alpha\} = \alpha \cup \{\alpha\}.$$

- Doğal sayılar kümesi, ω 'dır:

$$\omega = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Nasıl ki gerçel analiz geometrinin devamı olarak görülebilirse, benzer şekilde, kümeler kuramı da (ordinalleri incelediği için) saymanın devamı olarak görülebilir.

Gerçel sayılar, $\mathbb{R}$ kümesini oluşturur, ama hiçbir küme her ordinali içeremez, çünkü elemanları ordinal olan bir küme verilirse, bu ordinalerin her birinden kesin büyük olan bir ordinal vardır. Ordinaler, adı **ON** olan *özsınıfı* oluşturur.

Her küme bir sınıftır, ama bazı sınıflar küme değildir. Küme olmayan sınıflar, özsınıftır. Örneğin kendisinin elemanı olmayan kümeler, $\{x: x \notin x\}$ özsınıfını oluşturur.

Doğal sayılar, hem gerçel hem de ordinaldir. Gerçel sayılar gibi doğal sayılar ve ordinaler, toplanabilir ve çarpılabilir.

Gerçel sayıların toplanması ve çarpılması, doğal sayıların toplanmasından ve çarpılmasından elde edilebilir. Okuldaki gibi

- ω 'dan $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesini elde ederiz;
- $\mathbb{Z}$ 'den $\mathbb{Q}$ kesirli sayılar kümesini elde ederiz.

O zaman $\mathbb{R}$ gibi $\mathbb{Q}$ de, sıralanmış bir cisimdir, ama tam değildir. $\mathbb{Q}$ 'nin tam olmadığına iki anlamı vardır.

- $\mathbb{Q}$ 'nün $\{x \in \mathbb{Q}: x^2 < 2\}$ gibi boş olmayan, üstsınırı olan ama en küçük üstsınırı olmayan altkümeleri vardır.
- $\mathbb{Q}$ 'de, $(1, 3/2, 7/5, 17/12, 41/29, 99/70, \dots)$ gibi yakınsamayan Cauchy dizileri vardır.

Yukarıda verilen örnek kümesinin supremumu $\mathbb{R}$ 'de $\sqrt{2}$ olur, ve $(p_0, q_0) = (1, 1)$ ve $(p_{n+1}, q_{n+1}) = (p_n + 2q_n, p_n + q_n)$ olmak üzere $(p_n/q_n : n \in \omega)$ örnek dizisinin $\sqrt{2}$ limiti vardır.

$\mathbb{R}$ 'nin elemanları, girdileri kesirli olan Cauchy dizilerinin limitleri olarak tanımlanabilir. Bu durumda eğer $(a_n : n \in \omega)$ ve $(b_n : n \in \omega)$, girdileri kesirli olan ve limitleri sırasıyla a ve b olan Cauchy dizileri ise, o zaman

$$a + b = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n), \quad a \cdot b = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n).$$

Şimdi $\mathbb{R}$ 'de $x \mapsto a + x$ ve $x \mapsto a \cdot x$ işlemleri süreklidir.

Benzer sürekliliği ordinallerde elde edebiliriz. İlk olarak ω 'nın her elemanı, ya sıfırdır ya da bir ardıdır. Aslında ω 'nın kendisi, en küçük limit ordinalidir ve kendisini içermez. Normalde doğal bir k sayısının k' ardılı $k + 1$ olarak yazılır. O zaman doğal bir n sayısının eklenmesinin aşağıdaki *özyineli* tanımı vardır.

1. Eğer $m = 0$ ise, o zaman $n + m = n$.
2. Eğer $m = k + 1$ ise, o zaman $n + m = (n + k) + 1$.

Benzer şekilde n 'nin çarpmasının aşağıdaki *özyineli* tanımı vardır.

1. Eğer $m = 0$ ise, o zaman $n \cdot m = 0$.
2. Eğer $m = k + 1$ ise, o zaman $n \cdot m = (n \cdot k) + n$.

Eklenmesinin ve çoğaltmasının *özyineli* tanımlar, rastgele ordinarlar için kullanılabilir. Hâlâ rastgele bir ordinalin soldan

- bir limit ordinaline eklenmesini ve
- bir limit ordinalini çarpmasını

tanımlamak zorundayız. Bunun için *özyineli* tanımların üçüncü bir adımını kullanırız. Sonuç olarak bir α ordinalinin eklenmesini tanımlamak için aşağıdaki gibi *sonlu aşırı* *özyinelleme*yi kullanırız.

1. Eğer $\beta = 0$ ise, o zaman $\alpha + \beta = \alpha$.

2. Eğer $\beta = \gamma'$ ise, o zaman $\alpha + \beta = (\alpha + \gamma)'$.
 3. Eğer β bir limit ise, o zaman $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi : \xi < \beta\}$.
 Benzer şekilde α 'nın çarpmasının aşağıdaki sonlu aşırı özyineli tanımı vardır.

1. Eğer $\beta = 0$ ise, o zaman $\alpha \cdot \beta = 0$.
 2. Eğer $\beta = \gamma'$ ise, o zaman $\alpha \cdot \beta = (\alpha \cdot \gamma) + \alpha$.
 3. Eğer β bir limit ise, o zaman $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \xi : \xi < \beta\}$.
 Resmi tanımlar sayesinde $\xi \mapsto \alpha + \xi$ ve $\xi \mapsto \alpha \cdot \xi$ işlemleri süreklidir. Ayrıca, *sonlu aşırı tümevarım* ile soldan çarpmanın toplama üzerinde dağılmasını kanıtlarız: kısaca

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

Doğal ve gerçel sayıların bazı özellikleri, ordinallerde yanlıştır, örneğin

$$1 + \omega = \omega < \omega + 1.$$

Genelde

- $\alpha > 0$ ise $\xi \mapsto \xi + \alpha$ sürekli değildir;
- $\alpha > 1$ ise $\xi \mapsto \xi \cdot \alpha$ sürekli değildir.

Ordinal işlemlerinin geometrisi, aşağıdaki gibi anlaşılabilir.

Ordinallerin oluşturduğu **ON** sınıfı sadece doğrusal sıralanmış değil, *iyisıralanmıştır*, yani boş olmayan, elemanları ordinal olan her kümenin en küçük elemanı vardır. Dedğimiz gibi bir α ordinalinden küçük olan ordinals, küme olarak α 'nın kendisini oluşturur, dolayısıyla α da iyisıralanmıştır. Önemli bir teorem sayesinde her iyisıralanmış küme, bir ve tek bir ordinal ile izomorftur. Bu ordinal, iyisıralanmış kümenin *sıra tipidir*.

Verilen α ve β ordinallerinden bir liste elde edebiliriz. Önce α 'nın elemanlarını yazarız, sonra β 'nin elemanlarını. Örneğin

- $(\alpha, \beta) = (2, 5)$ ise $(0, 1, 0, 1, 2, 3, 4)$ elde edilir;
- $(\alpha, \beta) = (1, \omega)$ ise $(0, 0, 1, 2, 3, 4, \dots)$ elde edilir;

- $(\alpha, \beta) = (\omega, 1)$ ise $(0, 1, 2, 3, 4, \dots; 0)$ elde edilir.

Bu şekilde sıra tipi $\alpha + \beta$ olan iyisıralanmış $\alpha \sqcup \beta$ kümesini elde ederiz.

Genelde iki ordinalin Kartezyan çarpımını

$$\gamma < \delta \Rightarrow (\xi, \gamma) < (\eta, \delta) \wedge (\gamma, \zeta) < (\delta, \zeta)$$

kuralı ile iyisıralayabiliriz. O zaman bu sıralama ile resmi bir şekilde $\alpha \sqcup \beta$ kümesini $(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$ birleşimi olarak tanımlayabiliriz. Aynı sıralama ile Kartezyan $\alpha \times \beta$ çarpımının sıra tipi $\alpha \cdot \beta$ olur.

Aşağıdaki özyineli tanım ile herhangi doğal m sayısına göre pozitif doğal bir n sayısının kuvveti vardır.

1. Eğer $m = 0$ ise, o zaman $n^m = 1$.
2. Eğer $m = k + 1$ ise, o zaman $n^m = n^k \cdot n$.

Eğer a pozitif kesirli bir sayı ve b rastgele kesirli bir sayı ise, o zaman a^b kuvvetini tanımlayabiliriz, ama değeri kesirli olmayabilir. Elde edilen $x \mapsto a^x$ fonksiyonu sürekli olduğundan gerçel sayılarda da tanımlanabilir. Benzer şekilde a da rastgele pozitif gerçel bir sayı olabilir.

Ordinallerde kuvvetleri tanımlamak daha kolaydır. Aşağıdaki tanımımız vardır. Burada $\alpha > 0$:

1. Eğer $\beta = 0$ ise, o zaman $\alpha^\beta = 1$.
2. Eğer $\beta = \gamma'$ ise, o zaman $\alpha^\beta = \alpha^\gamma \cdot \alpha$.
3. Eğer β bir limit ise, o zaman $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\xi : \xi < \beta\}$.

Her zaman $1^\beta = 1$ ve $\alpha^0 = 1$. Eğer $\alpha > 1$ ve $\beta > 0$ ise, o zaman α^β kuvvetinin geometrik anlamı vardır. Zira bir γ için $\alpha^\beta > \gamma > 0$ olsun. O zaman bazı β_0, γ_0 , ve δ için

$$\beta > \beta_0, \quad \alpha > \gamma_0 > 0, \quad \alpha^{\beta_0} > \delta,$$

ve ayrıca

$$\gamma = \alpha^{\beta_0} \cdot \gamma_0 + \delta.$$

Eğer $\delta > 0$ ise, o zaman devam edebiliriz. Sonunda bir doğal n sayısı için,

$$\beta > \beta_0 > \beta_1 > \cdots > \beta_n$$

eşitsizliklerini sağlayan bazı β_i ordinalleri için, ve

$$\alpha > \gamma_i > 0$$

eşitsizliğini sağlayan bazı γ_i ordinalleri için

$$\gamma = \alpha^{\beta_0} \cdot \gamma_0 + \alpha^{\beta_1} \cdot \gamma_1 + \cdots + \alpha^{\beta_n} \cdot \gamma_n.$$

Bu şekilde β 'dan α 'ya giden öyle bir f_γ fonksiyonu vardır ki

$$f_\gamma(\xi) = \begin{cases} \gamma_i & \text{eğer } \xi = \beta_i \text{ ise,} \\ 0, & \text{eğer hiç } i \text{ için } \xi, \beta_i \text{ değilse.} \end{cases}$$

Şimdi γ ve δ , α 'dan küçük olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir.

- $\gamma > \delta$.
- Eğer ε , öyle ξ 'lerin en büyüğü ise ki

$$f_\gamma(\xi) \neq f_\delta(\xi)$$

ise, o zaman

$$f_\gamma(\varepsilon) > f_\delta(\varepsilon).$$

Böylece değer kümesi α olan, tanım kümesi β olan, β 'nın sonlu bir altkümesinin dışında değeri sıfır olan fonksiyonların oluşturduğu küme iyisralanmıştır, ve sıra tipi α^β olur.

Tanım kümesi B olan, değer kümesi A olan fonksiyonlar,

$${}^B A$$

kümesini oluştursun. O zaman

$$\{f \in {}^\beta \alpha : \{\xi \in \beta : f(\xi) \neq 0\} \text{ sonludur}\}$$

kümesini iyisıraladık. Tüm ${}^\beta\alpha$ kümesini iyisıralamak için yöntemimiz yoktur. Nitekim *Seçim Aksiyomu* sayesinde her küme iyisıralanabilir. O halde her küme, en az bir ordinal ile eşleniktir. Öyle ordinalerin en küçüğü, kümenin *kardinalidir*.

Resmi tanımlarımızdan

$$1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}.$$

O zaman herhangi A kümesi için A2 kümesi, A 'nın $\mathcal{P}(A)$ *kuvvet kümesi* ile eşleniktir. Bu kümenin elemanları, A 'nın altkümeleridir, ve eşleniklik

$${}^A2 \approx \mathcal{P}(A)$$

ile gösterilir. A2 kümesinden $\mathcal{P}(A)$ kümesine giden eşlemelerden biri,

$$f \mapsto \{x \in A : f(x) = 0\}$$

fonksiyonudur.

Bir kümenin kuvvet kümesinin kardinali, her zaman kümenin kendi kardinalinden büyüktür. Bundan dolayı **ON** sınıfından sonsuz kardinalerin oluşturduğu sınıfa giden $\xi \mapsto \aleph_\xi$ izomorfizması vardır. (Burada $\aleph$, İbrani alfabesinin *alef* olan ilk harfidir.) Özel olarak

$$\omega = \aleph_0.$$

Nitekim

$$\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\omega),$$

dolayısıyla pozitif bir α için $\mathbb{R}$ 'nin kardinali $\aleph_\alpha$ olur. Buradaki α 'nın 1 olması, *Kontinuum Hipotezidir*, ama bu önerme, aksiyomlarımızdan veya teoremlerimizden biri değildir.

Eğer κ ve λ sonsuz kardinal ise, o zaman en büyüğü, $\kappa \sqcup \lambda$ ve $\kappa \times \lambda$ kümelerinin her birinin kardinalidir. Bu teoremi, yukarıda

söylediğimiz teoremin özel bir durumundan elde edebiliriz. Her pozitif α için öyle

- doğal n sayısı,
 - kesin azalan $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$ dizisi,
 - girdileri pozitif doğal sayı olan $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ dizisi
- vardır ki α ,

$$\omega^{\beta_0} \cdot c_0 + \omega^{\beta_1} \cdot c_1 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot c_n$$

olarak yazılabilir. Bu toplam, α 'nın *Cantor normal biçimidir*. Bunu ve $\omega \times \omega \approx \omega$ eşlenikliğini kullanarak $\kappa \times \kappa \approx \kappa$ eşlenikliğini gösterebiliriz.

Cantor normal biçimlerinin toplanması ve çarpılması için kurallar elde edebiliriz.

Bazı sınıfların küme olmadığı, kümeler kuramının hususiyetlerinin biridir. Biri daha, her kümenin ve her sınıfın her elemanının küme olduğudur.

Gerçel analizde $\mathbb{R}$ bir kümedir, ama elemanları, küme olarak düşünülmez.

Kümeler kuramında $\mathbb{R}$, yukarıdaki gibi inşa edilir. Özellikle ω 'nın inşasının ayrıntıları, küme aksiyomlarını kullanır.

Aksiyom olarak boş sınıfın küme olduğunu kabul ederiz. Bu küme $\emptyset$ veya 0 olur. Başka bir aksiyom olarak her a kümesi için elemanları a 'nın elemanları ve a 'nın kendisi olan sınıf bir kümedir. Bu küme $a \cup \{a\}$ veya a' olur. *Sonsuzluk Aksiyomuna* göre ω bir kümedir, ama önce ω , sınıf olarak tanımlanmalı, ve bunun nasıl yapılması gerektiği açık değildir.

Kümelerin mantığında her sınıf, tek serbest değişkenli bir *formül* tarafından tanımlanır. Örneğin elemanları kendisini içermeyen kümeler olan sınıf, $x \notin x$ formülü tarafından tanımlanır, ve zaten yazdığımız gibi sınıfın kendisi,

$$\{x: x \notin x\}$$

olur. Her a kümesi, $x \in a$ formülü tarafından tanımlanır çünkü

$$a = \{x : x \in a\}.$$

Genelde bir φ formülünün tek serbest değişkeni varsa ve bu değişken x ise, o zaman φ 'yi sağlayan kümeler,

$$\{x : \varphi\}$$

sınıfını oluşturur. Bu sınıfın ω olması için φ 'yi sağlayan kümeler, ne limit olan ne limit içeren ordinarlar olacaktır.

2 Harfler ve Aksiyomlar

2.1 Harfler

Simge olarak kullanılırken harfler aşağıdaki anlamlara gelir. Ayrıca harflerin ilk kullanıldığı sayfalar verilir.

Küçük Latin harfleri

- a, b, c, d, e kümeler (sayfa 21)
- f, g, h tanım sınıfının küme olduğu göndermeler (sayfa 43)
- i, j doğal sayı değişkenleri (sayfa 38)
- k, ℓ, m, n doğal sayılar (sayfa 38)
- s, t terimler (sayfa 22)
- u, v, w, x, y, z küme değişkenleri (sayfa 21)

Büyük Latin harfleri

- A, B, C, D kümeler (sayfa 39)
- X, Y, Z küme değişkenleri (sayfa 38)

Kıvrık Latin harfleri

- $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ kümeler (sayfa 43)
- $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$ (sayfa 29 ve 85)
- $\mathcal{P}_\omega(A) = \{X \in \mathcal{P}(A) : \text{kard}(X) < \omega\}$ (sayfa 85)

Düz büyük Latin harfleri

- A, B ifadeler (sayfa 23)

Büyük siyah Latin harfleri

- A, B, C sınıflar (sayfa 28)
- F, G, H göndermeler (sayfa 36)

Dikey büyük siyah Latin harfleri

- KN kardinaller sınıfı (sayfa 81)
- ON ordinaller sınıfı (sayfa 46)
- V evren sınıfı (sayfa 29)

Yunan harfleri

- $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ordinaller (sayfa 47)
- ζ, η ordinal değişkenleri (sayfa 47)
- θ ordinal (sayfa 51)
- $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ kardinaller (sayfa 82 ve 89)
- ξ ordinal değişkeni (sayfa 47)
- π, φ, χ, ψ formüller (sayfa 23, 20, 23, 22)

Dikey Yunan harfi

- ε_0 $\sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}$ (sayfa 76)
- ω doğal sayıları kümesi (sayfa 38)

Dikey küçük Latin harfleri

- $kard$ kardinal (sayfa 81)
- kf kofinallik (sayfa 91)
- $maks$ en büyük (*maximum*; sayfa 84)

- $\min$ en küçük (*minimum*; sayfa 48)
- $\sup$ en küçük üstsınır (*supremum*; sayfa 50)

Dikey büyük Latin harfleri

- GKH Genelleştirilmiş Kontinü Hipotezi (sayfa 90)
- KH Kontinü Hipotezi (sayfa 90)
- ZF Zermelo–Fraenkel Aksiyomları (sayfa 89)
- ZFC Seçim Aksiyomu ile ZF (sayfa 89)

“Tahta siyahı” harfleri

- $\mathbb{N}$ sayma sayıları kümesi (sayfa 38)
- $\mathbb{Q}$ kesirli sayılar kümesi (sayfa 45)
- $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi (sayfa 45)
- $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi (sayfa 45)

Harflerden türeyen simgeler

- $\forall$ her . . . için (*for All*; sayfa 27)
- $\exists$ bazı . . . için (*there **Exists***; sayfa 22)
- $\in$ (“ $a \in B$ ” = “ $a \epsilon \sigma \tau i B$ ”; sayfa 21)
- $\cup, \bigcup$ bileşim (***U**nion*; sayfa 29)
- $\vee$ veya (Latince **V**EL; sayfa 26)

2.2 Aksiyomlar

Kümeler için dokuz tane aksiyom kullanacağız.

Eşitlik (sayfa 30): eşit kümeler, aynı kümelerin elemanlarıdır.

Ayırma (sayfa 32): her kümenin her altsınıfı, bir kümedir.

Boş Küme (sayfa 32): boş sınıf, bir kümedir.

Bitiştirme (sayfa 32): bir kümeden bir elemanı daha olan sınıf, bir kümedir.

Sonsuzluk (sayfa 38): doğal sayılar sınıfı, bir kümedir.

Yerleştirme (sayfa 37): bir gönderme altında bir kümenin imgesi, bir kümedir.

Bileşim (sayfa 49): bir kümenin bileşimi, bir kümedir.

Kuvvet Kümesi (sayfa 87): bir kümenin altkümelerinin oluşturduğu sınıf, bir kümedir.

Seçim (sayfa 89): her küme iyisıralanabilir.

Kullanmayacağımız bir aksiyoym da vardır.

Temel: her boş olmayan kümenin, kendisinden ayrık bir elemanı vardır.

Seçim Aksiyomu (*Axiom of Choice*) çıkarılırsa kalan dokuz aksiyoym, **Zermelo–Fraenkel Aksiyomlarıdır**, kısaca ZF. Hep beraber, aksiyomlara ZFC denir.

3 Mantık

3.1 Kümeler ve Sınıflar

- Öklid'in *Öğeler*'inde ortak kavramları kullanarak postulatlardan diğer önermeleri kanıtlarız.
- Kümeler kuramında mantığın kurallarını kullanarak aksiyomlardan diğer teoremleri kanıtlarız.

Kümeler kuramında her teorem, *serbest değişkeni olmayan bir formüldür*, kısaca bir **cümledir** (*sentence*).

Tek serbest değişkeni olan bir formülde, formülün serbest değişkeninin *serbest geçişlerinin* yerine bir *kümenin* adı konulabilir. Eğer formül φ ve küme a ise, o zaman meydana gelen cümle

$$\boxed{\varphi(a)}$$

olur. Bu cümle, her cümle gibi ya *doğrudur* ya da *yanlıştır*. Eğer doğru ise, o zaman a kümesi, φ formülünü **sağlar** (*satisfies*).

Bir formülü sağlayan kümeler, bir **sınıf** oluşturur. Oluşturan kümeler, sınıfın **elemanlarıdır** (*elements*), ve formül, sınıfı **tanımlar** (*defines*). Eğer formül φ ve tek serbest değişkeni x ise, o zaman

$$\boxed{\{x: \varphi\}}$$

sınıfı tanımlanır.

Kümelerin de elemanları vardır, ve her biri bir kümedir. Eğer bir a kümesi, bir b kümesinin bir elemanı ise, o zaman

$$a \in b$$

cümlesi yazılır. Aksi durumda

$$a \notin b$$

yazılır.

Teorem 1. *Her küme, bir sınıftır.*

Kanıt. Her a kümesi, $\{x: x \in a\}$ sınıfıdır. □

Teorem 2 (Russell Paradoksu). *Küme olmayan bir sınıf vardır.*

Kanıt. Her a kümesi için aşağıdaki iki koşul denktir.

1. a , $\{x: x \notin x\}$ sınıfının elemanıdır.
2. a , a kümesinin elemanı değildir (yani $a \notin a$).

Öyleyse $\{x: x \notin x\}$ sınıfı, her kümeden farklıdır. □

3.2 Formüller

Formüllerde kullanacağımız singeler ya *mantıksaldır* ya da *mantıksal olmayandır*.

- **Mantıksal** (*logical*) singeler:

- **terimler** (*terms*):

- * **sabitler** (*constants*): $a, b, c, \dots$

- * **değişkenler** (*variables*): $z, y, x, \dots$

- **bağlayıcılar** (*connectives*):

- * **iki-konumlu** (*binary*) bir bağlayıcı: $\wedge$

- * **tek-konumlu** (*singular*) bir bağlayıcı: $\neg$

- bir **niceleyici** (*quantifier*): $\exists$
- **ayraçlar** (*parentheses, brackets*):

* sol: $($

* sağ: $)$

- **mantıksal olmayan** (*non-logical*) bir simge:

- iki-konumlu bir **yüklem** (*predicate*): $\in$

Formüller (*formulas*) için tanım *özyinelidir*. Aslında formüllerin dört tane türü vardır.

1. t ve s terim olmak üzere

$$t \in s$$

ifadesi bir formüldür, ve bu formül bir **içermedir** (*containment*).

2. φ bir formül olmak üzere

$$\neg \varphi$$

ifadesi bir formüldür, ve bu formül bir **değillemedir** (*negation*).

3. φ ve ψ formül olmak üzere

$$(\varphi \wedge \psi)$$

ifadesi bir formüldür, ve bu formül bir **tümel evetlemedir** (*conjunction*).

4. φ bir formül, x bir değişken olmak üzere

$$\exists x \varphi$$

ifadesi bir formüldür, ve bu formül bir **örneklemedir** (*instantiation*).

Her formül ya bir içermidir, ya da bir değillemedir, ya da bir tümel evetlemedir, ya da bir örneklemedir. Ayrıca

- bir φ formülü, hem $\neg\varphi$ değillemesinin hem de $\exists x \varphi$ örneklemesinin tek **bileşenidir** (*component*);
- bir φ ve bir ψ formülü, $(\varphi \wedge \psi)$ örneklemesinin bileşenleridir.

Lemma 1. *Eğer bazı simgeler, bir formülün sonuna eklenirse veya sonundan kaldırılırsa, o zaman yeni bir formül elde edilmez.*

Kanıt. Formüllerin tanımının sağladığı tümevarım yöntemini kullanacağız.

1. Bir içirme için iddiamız doğrudur, çünkü içermeler ve sadece içermeler, terim ile başlar, ve bu formüllerin her birinin uzunluğu üçtür.

2. Tümevarım hipotezi olarak iddiamızın bir φ formülü için doğru olduğu kabul edilsin. Mümkünse bazı simgeler $\neg\varphi$ formülünün sonuna ekleyerek veya sonundan kaldırarak yeni bir formül elde edilsin. O zaman ortaya çıkan formül, bir A ifadesi için, $\neg A$ biçimindedir. Bu durumda A , bir ψ formülü olmalıdır, ve simgeleri φ 'nin sonuna ekleyerek veya sonundan kaldırarak ψ elde edilir, ki bu hipoteze göre imkânsızdır. O zaman iddiamız $\neg\varphi$ için doğrudur.

3. Tümevarım hipotezi olarak iddiamızın bir φ formülü ve bir ψ formülü için doğru olduğu kabul edilsin. Mümkünse bazı simgeleri $(\varphi \wedge \psi)$ formülünün sonuna ekleyerek veya sonundan kaldırarak yeni bir formül elde edilsin. O zaman ortaya çıkan formül, bir A ifadesi için, $(A$ biçimindedir. Bu durumda A , bir χ ve bir π formülü için $\chi \wedge \pi$) olmalıdır. Bu durumda χ , φ olmalıdır, çünkü aksi durumda simgeler φ 'nin sonuna ekleyerek veya sonundan kaldırarak χ elde edilir, ve hipoteze göre

bu imkânsızdır. Şimdi aynı şekilde π , ψ olmalıdır. O zaman iddiamız $(\varphi \wedge \psi)$ için doğrudur.

4. Benzer şekilde iddiamızın bir φ formülü için doğru olduğu kabul edilirse, o zaman $\exists x \varphi$ için de doğrudur.

Böylece tümevarımdan her durumda iddiamız doğrudur. $\square$

Teorem 3 (Tek Okunabilirlik).

1. Her formülün tek bir türü vardır.
2. Tek bir şekilde bir formül tümel evetleme olabilir.

Örneğin $(\varphi \wedge (\psi \wedge \chi))$ formülü, tümel evetlemedir; ayrıca tek bir şekilde tümel evetlemedir, çünkü sadece φ ve $(\psi \wedge \chi)$, verilen formülün bileşenleridir. Aslında

$$\varphi \wedge (\psi$$

ve

$$\chi)$$

sırasıyla **A** ve **B** ile gösterilirse, o zaman $(\varphi \wedge (\psi \wedge \chi))$, $(A \wedge B)$ olur, ama **A** ile **B** bu formülün bileşenleri değildir, çünkü formül değildir.

Teoremin kanıtı. Bir formülün ilk simgesi

- bir terim ise, formül bir içermedir;
- $\neg$ ise, formül bir değillemedir;
- $($ ise, formül bir tümel evetlemedir;
- $\exists$ ise, formül bir örneklemedir.

Ayrıca eğer φ , ψ , χ , ve π formülleri için $(\varphi \wedge \psi)$ ve $(\chi \wedge \pi)$ aynı formül ise, o zaman Lemma 1'den φ ve χ aynı formüldür, dolayısıyla ψ ve π aynı formüldür. $\square$

Bir değişkenin bir formülde birkaç tane **geçiş** (*occurrence*) olabilir. Örneğin $\exists x (x \in y \wedge x \in z)$ formülünde x değişkeninin üç tane geçişi vardır (ayrıca y ve z 'nin birer geçişi vardır).

Teorem 3 sayesinde bir formülde bir değişkenin bir geçişinin **serbest** (*free*) olmasına *özyineli* bir tanım verebiliriz:

1. Bir içermeye bir değişkenin her geçişi, serbesttir.
2. Bir değillenmenin bileşeninde bir değişkenin serbest bir geçişi, değillenmenin kendisinde serbesttir.
3. Bir tümel evetlemenin bir bileşeninde bir değişkenin serbest bir geçişi, tümel evetlemenin kendisinde serbesttir.
4. Bir $\exists x \varphi$ örneklemede
 - x 'ten farklı olan bir değişkenin φ 'deki serbest bir geçişi serbesttir;
 - x 'in hiç serbest geçişi yoktur.

Serbest olmayan bir geçiş, **bağlıdır** (*bound*).

Bir formülde bir değişkenin serbest geçişi varsa, bu değişken, formülün bir **serbest değişkenidir**. Serbest değişkeni olmayan bir formül, bir **cümledir**.

Şimdilik φ , tek serbest değişkeni x olan bir formül; a , bir küme; ve y , bir değişken olsun. Eğer x 'in φ 'deki her serbest geçişinin yerine a konulursa, o zaman gördüğümüz gibi $\varphi(a)$ cümlesi elde edilir. Eğer φ 'de y 'nin bağlı olduğu yerde x serbest değilse, ve x 'in φ 'deki her serbest geçişinin yerine y konulursa, o zaman

$$\boxed{\varphi(y)}$$

formülü elde edilir. Örneğin φ , $\exists y y \in x$ ise, o zaman y , verilen koşulu sağlamaz, ama $\varphi(z)$, $\exists y y \in z$ olur. Ayrıca genel durumda φ 'nin kendisi, $\varphi(x)$ olur.

Eğer φ 'nin birden fazla serbest değişkeni varsa, o zaman benzer ifadeler kullanılabilir (örneğin Teorem 5'in kanıtında).

3.3 Doğruluk ve yanlışlık

Özyineli bir tanıma göre her cümle ya **doğrudur** (*true*) ya da **yanlıştır** (*false*).

1. Bir a kümesi bir b kümesinin bir elemanı ise, o zaman $a \in b$ içermesi doğrudur; aksi durumda yanlıştır.
2. Bileşeni doğru ise, o zaman bir değilleme yanlıştır; aksi durumda doğrudur.
3. Bileşenlerinin her biri doğru ise, bir tümel evetleme de doğrudur; aksi durumda yanlıştır.
4. Bir φ formülünün tek serbest değişkeni x olsun. Bir a kümesi için $\varphi(a)$ cümlesi doğru ise, o zaman $\exists x \varphi$ örnekleme de doğrudur. Her a kümesi için $\varphi(a)$ cümlesi yanlış ise, o zaman $\exists x \varphi$ örnekleme de yanlıştır.

3.4 Kısaltmalar

Bazı formüller kısalabilir.

3.4.1 Yeni bağlayıcılar ve bir niceleyici

Yeni iki-konumlu bağlayıcılar ile

- $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ formülü, $\boxed{(\varphi \vee \psi)}$ **tikel evetlemesi** (*disjunction*);
- $(\neg\varphi \vee \psi)$ formülü, $\boxed{(\varphi \Rightarrow \psi)}$ **gerektirmesi** (*implication*);
- $((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi))$ formülü, $\boxed{(\varphi \Leftrightarrow \psi)}$ **denkliği** (*equivalence*)

olarak kısaca yazılır. Ayrıca yeni bir niceleyici ile

- $\neg\exists x \neg\varphi$ formülü, $\boxed{\forall x \varphi}$ **genelleştirmesi** (*generalization*)

olarak kısaca yazılır.

3.4.2 Fazla ayraçlar

- Varsa, bir formülün en dıştaki ayraçları yazılmayabilir.
- $\Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$ bağlayıcılarına göre $\wedge$ ve $\vee$ bağlayıcılarına öncelik verilebilir: örneğin $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \chi$ ifadesi, $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \chi$ formülünün anlamına gelir.
- $\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$ ifadesi, $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)$ formülünün anlamına gelir.

3.4.3 Yeni yüklemeler

Tek serbest değişkenli bir formülün tanımladığı sınıf, formülün **yorumudur** (*interpretation*). Bir sınıf, **tek konumlu bir bağıntıdır** (*singular relation*). İki serbest değişkenli bir formülün yorumu da vardır, ve bu yorum, **iki-konumlu bir bağıntıdır** (*binary relation*). Ayrıca $x \in y$ formülünün yorumu, $\in$ yüklemine kendisinin yorumu olarak sayılabilir. Bu yorum, **eleman olma** (*being an element*) bağıntısıdır. Başka formüllerin tanımladığı bağıntılar için yeni $\subseteq$, $=$, $\notin$, $\not\subseteq$, $\neq$, $\subset$, ve $\not\subset$ yüklemine kullanacağız.

Bir $\forall x (x \in t \Rightarrow x \in s)$ formülünün yerine

$$\boxed{t \subseteq s}$$

kapsaması (*inclusion*) yazılır. Eğer $a \subseteq b$ ise (yani cümle doğru ise), o zaman a , b 'nin bir **altkümesidir** (*subset*).

Bir $t \subseteq s \wedge s \subseteq t$ formülünün yerine

$$\boxed{t = s}$$

eşitliği (*equation*) yazılır. Eğer $a = b$ ise, o zaman a , b 'ye **eşittir** (*equal*). Şimdi bildiğimiz kadarıyla eşitlik, aynılık değildir. Aşağıdaki teoreme göre eşit olma, elemanları aynı değildir.

Teorem 4. *Her a ve her b kümesi için*

$$a = b \Leftrightarrow \forall x (x \in a \Leftrightarrow x \in b).$$

Alıştırma 1. Teoremi kanıtlayın.

İçermelerin, kapsamaların, ve eşitliklerin özel değillemeleri vardır.

formül	değilmesi
$t \in s$	$t \notin s$
$t \subseteq s$	$t \not\subseteq s$
$t = s$	$t \neq s$

Bir $t \subseteq s \wedge t \neq s$ formülünün yerine

$$\boxed{t \subset s}$$

yazılır; tabii ki formülün değilmesi $t \not\subseteq s$. Eğer $a \subset b$ ise, o zaman a , b 'nin bir **özaltkümesidir** (*proper subset*).

Yeni yüklemlerimiz, bağlayıcı gibi de kullanılabilir. Önce sınıflar için, kısaltma olarak büyük siyah harfler kullanılsın. Örneğin eğer φ , tek serbest değişkeni x olan bir formül ise, o zaman $\{x: \varphi\}$ sınıfı, **A** olsun. Bu durumda φ formülünün kendisi için

$$\boxed{x \in A}$$

ifadesi bir kısaltmadır. Aynı zamanda tek serbest değişkeni x olan bir ψ formülü için $\{x: \psi\}$ sınıfı, **B** olsun. O zaman $\forall x (\varphi \Rightarrow \psi)$ cümlesinin yerine

$$\boxed{A \subseteq B}$$

kapsaması yazılabilir, ve $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ cümlesinin yerine

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{B}}$$

eşitliği yazılır.

Bir formülde küme olmayan bir sınıf bir kümenin yerini alamaz, ama $\exists x (x = \mathbf{A} \wedge \psi)$ formülünün yerine

$$\boxed{\psi(\mathbf{A})}$$

kısaltması yazılabilir.

3.4.4 İşlemler

Verilen formüllerden yeni formüller elde ederek yeni sınıflar da elde ederiz. Böylece sınıflarda iki-konumlu, tek-konumlu, ve **sıfır-konumlu** (*nullary*) işlemler vardır, ve bunların bazıları için kısaltmalar vardır. Aşağıda $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$, rastgele sınıftır.

formül	tanımlanmış sınıf	adı
$x \in \mathbf{A} \wedge x \in \mathbf{B}$	$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$	$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ 'nin kesişi mi
$x \in \mathbf{A} \vee x \in \mathbf{B}$	$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$	$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ 'nin birleş imi
$x \in \mathbf{A} \wedge x \notin \mathbf{B}$	$\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$	$\mathbf{A}$ 'nın $\mathbf{B}$ 'den fark ı
$x \subseteq \mathbf{A}$	$\mathcal{P}(\mathbf{A})$	$\mathbf{A}$ 'nın kuvvet sınıf ı
$\forall y (y \in \mathbf{A} \Rightarrow x \in y)$	$\bigcap \mathbf{A}$	$\mathbf{A}$ 'nın kesişi mi
$\exists y (y \in \mathbf{A} \wedge x \in y)$	$\bigcup \mathbf{A}$	$\mathbf{A}$ 'nın birleş imi
$x = x$	$\mathbf{V}$	evren sınıf ı
$x \neq x$	$\emptyset$	boş sınıf

Dikkat edin: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, bir cümledir, ama $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, bir sınıftır; aslında

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{x: x \in \mathbf{A} \wedge x \in \mathbf{B}\}.$$

Tek serbest değişkeni x olan bir φ formülü için $x \in \mathbf{A} \wedge \varphi$ formülü

$$\boxed{\{x \in \mathbf{A} : \varphi\}}$$

sınıfını tanımlar.

Verilen *kümelerden* yeni sınıflar da elde edebiliriz. Aşağıda a ve b , rastgele kümedir. Buradaki yeni sınıflar, bazı aksiyomlar ile küme de olacak, ama şimdilik sınıf olarak sayılmalı.

formül	tanımlanmış sınıf	adı
$x \in a \vee x = a$	a'	a 'nın ardılı
$x = a$	$\{a\}$	a 'nın birlişi
$x = a \vee x = b$	$\{a, b\}$	a ve b 'nin ikilisi

3.5 Eşitlik

Dediğimiz gibi Teorem 4'e göre eşit kümelerin elemanları aynıdır. Eşit kümelerin aynı kümelerin elemanı olduğunu şimdilik gösteremiyoruz, ama bunu varsayarak eşit kümelerin aynı *sınıfların* elemanı olduğunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

AKSİYOM 1 (Eşitlik). *Eşit kümeler aynı kümelerin elemanıdır:*

$$\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge x \in z \Rightarrow y \in z).$$

Teorem 5. *Eşit kümeler aynı sınıfların elemanıdır: her $\mathbf{A}$ sınıfı için*

$$\forall x \forall y (x = y \wedge x \in \mathbf{A} \Rightarrow y \in \mathbf{A}).$$

Kanıt. $a = b$ ve x bir değişken olsun. Eğer bir φ formülünde, x 'ten farklı olan her y değişkeni için, y 'nin serbest geçişlerinin yerine bir sabit konulursa, elde edilen formül, tek serbest değişkeni x olan bir φ^* formülü olarak sayılabilir. Lemma 1'deki

gibi tümevarım kullanarak her φ formülü için, bunden elde edilen her φ^* için

$$\varphi^*(a) \Rightarrow \varphi^*(b)$$

göstereceğiz. Birincisi hariç, durumlar saf mantıktan doğrudur.

1. Eğer bir c kümesi için φ^*

- a) $c \in x$ ise, Teorem 4'ten iddia doğrudur;
- b) $x \in c$ ise, Eşitlik Aksiyomu'ndan iddia doğrudur;
- c) $x \in x$ ise, Teorem 4 ve Eşitlik Aksiyomu'ndan iddia doğrudur, çünkü $a \in a$ hipotezi altında Teorem 4'ten $a \in b$ olur, dolayısıyla Eşitlik Aksiyomu'ndan $b \in b$.

2. Eğer φ 'nin bir ψ formülü olduğu durumda iddia doğru ise, o zaman φ 'nin $\neg\psi$ olduğu durumda iddia doğrudur.

3. Benzer şekilde eğer φ 'nin bir ψ veya bir χ formülü olduğu durumda iddia doğru ise, φ 'nin $(\psi \wedge \chi)$ olduğu durumda iddia doğrudur.

4. Son adımda da φ 'nin bir ψ formülü olduğu durumda iddia doğru olsun. İki durum vardır.

a) $(\exists x \psi)^*$ bir cümle olduğundan $\{x: (\exists x \psi)^*\}$ sınıfı ya boş ya da evren sınıfıdır. Bu durumda φ 'nin bir $\exists x \psi$ formülü olduğu durumda iddia doğrudur.

b) Şimdi y , x 'ten farklı bir değişken olsun, ve $(\exists y \psi)^*(a)$ doğru olsun. Burada $(\exists y \psi)^*$ formülünden bir ψ^* formülünü elde etmek için

- $\exists y$ öneki çıkarırız,
- kalan formülde bir c sabiti için y 'nin her serbest geçişinin yerine c 'yi koyarız.

Hipotezden bir c için $\psi^*(a)$ doğrudur, dolayısıyla $\psi^*(b)$ doğrudur, ve sonuç olarak $(\exists y \psi)^*(b)$ de doğrudur. $\square$

Şimdi eşitlik, aynılık olarak sayılabilir.

3.5.1 Sonuçlar

Teorem 6.

$$\bigcap \emptyset = \mathbf{V}, \quad \bigcup \emptyset = \emptyset,$$

ve ayrıca her $\mathbf{A}$ sınıfı için

$$\forall x \left(x \in \mathbf{A} \Rightarrow \bigcap \mathbf{A} \subseteq x \subseteq \bigcup \mathbf{A} \right),$$

ve ayrıca her $\mathbf{B}$ sınıfı için

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \Rightarrow \bigcap \mathbf{B} \subseteq \bigcap \mathbf{A} \wedge \bigcup \mathbf{A} \subseteq \bigcup \mathbf{B}.$$

Alıştırma II. Teoremi kanıtlayın.

AKSİYOM 2 (Ayrırma). Her kümenin her altsınıfı bir kümedir.

Şimdi her $\{x \in a : \varphi\}$ sınıfı, bir kümedir.

Teorem 7. $\mathbf{V}$ bir küme değildir, ama $\mathbf{A}$ boş değilse $\bigcap \mathbf{A}$ bir kümedir.

Alıştırma III. Teoremi kanıtlayın.

Şu anda bir kümenin var olup olmadığını bilmiyoruz!

3.5.2 Sayılar

AKSİYOM 3 (Boş Küme). $\emptyset$ sınıfı bir kümedir.

Boş küme 0 olarak da yazılır.

AKSİYOM 4 (Bitiştirme). Her a ve her b kümesi için $a \cup \{b\}$ sınıfı bir kümedir.

Özel olarak her kümenin ardılı da bir kümedir. Tanıma göre

$$1 = 0' = \{0\}, \quad 2 = 1' = \{0, 1\}$$

olsun. Benzer şekilde

$$3 = 2' = \{0, 1, 2\}$$

olsun. Aslında $\{a, b, c\}$ ifadesini tanımlamadık, ama tanımlaması kolaydır:

$$\{a, b, c\} = \{x: x = a \vee x = b \vee x = c\}$$

olsun. Aynı şekilde

$$4 = 3' = \{0, 1, 2, 3\} = \{x: x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3\}$$

olsun. Bunun gibi tanımlara devam edilebilir. Bu şekilde elde edilen kümeler, **doğal sayılardır**. Şimdilik doğal sayılar, sadece bir **toplama** veya **koleksiyon** (*collection*) oluşturur. Toplamalar için resmi bir tanımımız yoktur, ama her kümenin bir sınıf olması gibi her sınıf bir toplamadır. Ayrıca toplamalar için Teorem 2'nin benzeri vardır. Aşağıdadır ama onu kullanmayacağız.

Teorem 8 (Tarski). *Sınıf olmayan bir toplama vardır.*

Kanıt. Her φ formülü için bir $\ulcorner \varphi \urcorner$ kümesini tanımlayabiliriz. Bu kümeye φ 'nin *Gödel kümesi* denebilir. Gödel kümelerini tanımlamak için, önce her simgeye bir Gödel kümesini veririz. Sıralı ikililerin aşağıdaki (3.1) tanımını kullanarak her a sabiti için $\ulcorner a \urcorner$ kümesi $(0, a)$ olsun. Diğer simgelerin Gödel kümeleri,

x	$\wedge$	$\neg$	$\exists$	$($	$)$	$\in$	z	y	x	$\dots$
$\ulcorner x \urcorner$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\dots$

tablosundaki gibi tanımlansın. Sıralı ikililer doğal sayı olmadığından farklı simgelerin Gödel kümeleri de farklıdır. Şimdi her φ formülü, girdileri s_i simgeleri olan bir $s_0 s_1 \cdots s_n$ listesi olduğundan $\ulcorner \varphi \urcorner$,

$$\{(0, \ulcorner s_0 \urcorner), (1, \ulcorner s_1 \urcorner), \dots, (n, \ulcorner s_n \urcorner)\}$$

kümesi olarak tanımlanabilir. O zaman öyle toplama vardır ki elemanları, tek serbest değişkenli formüllerin Gödel kümeleridir, ve ayrıca $\ulcorner \varphi \urcorner$ toplamadadır ancak ve ancak $\neg \varphi$ formülünü sağlar. Şimdi tek serbest değişkeni x olan her φ formülü için aşağıdaki koşullar denktir.

1. $\ulcorner \varphi \urcorner$, yukarıdaki toplamadadır.
2. $\ulcorner \varphi \urcorner, \{x: \varphi\}$ sınıfta değildir.

Öyleyse verilen toplama, her sınıftan farklıdır. $\square$

Doğal sayılar toplamasını, sınıf olarak tanımlamak için çalışmak zorundayız.

3.6 Bağıntılar

Bitiştirme Aksiyomu sayesinde her $\{a\}$ sınıfı, $\emptyset \cup \{a\}$ kümesidir. O zaman $\{a, b\}$ sınıfı, $\{a\} \cup \{b\}$ kümesidir. Tanıma göre

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \quad (3.1)$$

olsun. Burada (a, b) de bir kümedir. Bu küme, a ve b 'nin **sıralı ikilisidir** (*ordered pair*). Aslında bir ikilidir, ama a ve b 'nin $\{a, b\}$ ikilisi değildir.

Teorem 9. $\forall x \forall y \forall z \forall w ((x, y) = (z, w) \Leftrightarrow x = z \wedge y = w).$

Alıştırma IV. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi serbest değişkenleri x ve y olan bir φ formülünün yorumu,

$$\{z: \exists x \exists y (z = (x, y) \wedge \varphi)\}$$

sınıfı olarak tanımlanabilir. Bu sınıf

$$\{(x, y): \varphi\}$$

olarak yazılabilir. Dediğimiz gibi bu sınıf, iki-konumlu bir bağıntıdır. Eğer bu bağıntıyı $\mathbf{R}$ olarak yazarsak, o zaman $\varphi(a, b)$ cümlesinin yerine

$$a \mathbf{R} b$$

ifadesini yazabiliriz. Bu şekilde $\mathbf{R}$ ifadesi, $\in$ ve $\subset$ gibi bir yüklem olur. Eğer

$$\neg \exists x x \mathbf{R} x$$

ise, o zaman $\mathbf{R}$, **yansızdır**. Eğer

$$\forall x \forall y \forall z (x \mathbf{R} y \wedge y \mathbf{R} z \Rightarrow x \mathbf{R} z)$$

ise, o zaman $\mathbf{R}$, **geçişlidir**. Hem yansız, hem de geçişli bir bağıntı, bir **sıralamadır**. Örneğin $\subset$ özaltküme olma bağıntısı bir sıralamadır.

Alıştırma V. $\in$ eleman olma bağıntısının bir sıralama olmadığını gösterin.

Eğer $\mathbf{R}$ bir sıralamadır ve ayrıca

$$\forall x \forall y (x \neq y \Rightarrow x \mathbf{R} y \vee y \mathbf{R} x)$$

ise, o zaman $\mathbf{R}$, **doğrusal** bir sıralamadır.

Alıştırma VI. $\subset$ özaltküme olma sıralamasının doğrusal olmadığını gösterin.

Eğer $\mathbf{R}$ bir sıralama ve $a \mathbf{R} b$ ise, o zaman $\mathbf{R}$ 'ye göre

- a, b 'den **büyüktür**
- b, a 'dan **küçüktür**.

Eğer rastgele bir $\mathbf{R}$ bağıntısı ve bir $\mathbf{A}$ sınıfı için $\{(x, y) : x \in \mathbf{A} \wedge y \in \mathbf{A} \wedge x \mathbf{R} y\}$ bağıntısı bir sıralama ise, o zaman $\mathbf{R}$ 'nin kendisi, $\mathbf{A}$ 'yı sıralar. Örneğin $\subset$ ve $\in$, doğal sayıları aynı şekilde sıralayacak.

Eğer $\mathbf{R}$, $\mathbf{A}$ 'yı sıralar ve ayrıca $\mathbf{R}$ 'ye göre $\mathbf{A}$ 'nın her altkümünün en küçük elemanı varsa, o zaman $\mathbf{R}$, $\mathbf{A}$ 'yı **iyisıralar**. Örneğin $\subset$ ve $\in$, doğal sayıları aynı şekilde iyisıralayacak. Genelde eğer B , iyisıralanmış bir sınıfın boş olmayan bir altkümesi ise, o zaman B 'nin en küçük elemanı

$$\boxed{\min(B)}$$

ile gösteriliyor.

İki-konumlu bir $\mathbf{R}$ bağıntısını tanımlayan formül,

$$x \mathbf{R} y$$

olsun. Bir $\mathbf{D}$ sınıfı için, eğer

$$\forall x \forall y \forall z (x \in \mathbf{D} \wedge x \mathbf{R} y \wedge x \mathbf{R} z \Rightarrow y = z)$$

ise, o zaman $\mathbf{D}$ 'de $\mathbf{R}$ bir **göndermeyi** tanımlar. Eğer bu göndermeye $\mathbf{F}$ denirse, o zaman $\mathbf{D}$, $\mathbf{F}$ 'nin **tanım sınıfıdır**, ve $x \in \mathbf{D} \wedge x \mathbf{R} y$ formülünün yerine

$$\mathbf{F}(x) = y$$

yazılabilir; ayrıca $\mathbf{F}$ 'nin yerine

$$x \mapsto \mathbf{F}(x)$$

yazılabilir. Örneğin $\mathbf{V}$ 'de $x \mapsto x'$ göndermesi vardır. Genel durumda eğer ayrıca bir $\mathbf{E}$ sınıfı için

$$\forall x \forall y (\mathbf{F}(x) = y \Rightarrow y \in \mathbf{E})$$

ise, bu cümle

$$\mathbf{F}: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$$

olarak yazılabilir. Sayfa 35'teki gibi

$$\exists x \exists y (z = (x, y) \wedge \mathbf{F}(x) = y)$$

formülünün tanımladığı sınıf

$$\{(x, y): \mathbf{F}(x) = y\}$$

olarak yazılabilir. Bu sınıf, $\mathbf{F}$ 'nin kendisi olarak anlaşılabilir.

AKSİYOM 5 (Yerleştirme). *Her $\mathbf{F}$ göndermesi için, $\mathbf{F}$ 'nin tanım sınıfının her a altkümesi için*

$$\{y: \exists x (\mathbf{F}(x) = y \wedge x \in a)\}$$

sınıfı bir kümedir.

Aksiyomda verilen küme

$$\{\mathbf{F}(x): x \in a\}, \quad \mathbf{F}[a]$$

ifadelerinin biri ile gösterilebilir. Eğer $\mathbf{F}$ 'nin tanım sınıfı zaten bir küme ise, o zaman Yerleştirme Aksiyomu'ndan $\mathbf{F}$ 'nin kendisi de bir kümedir.

4 Doğal sayılar

4.1 Tümevarım

Bir $\mathbf{A}$ sınıfı için, eğer

- 1) $0 \in \mathbf{A}$,
- 2) $\forall x (x \in \mathbf{A} \Rightarrow x' \in \mathbf{A})$

ise, $\mathbf{A}$ 'ya **tümevarımlı** densin. Örneğin $\mathbf{V}$ tümevarımlıdır.

AKSIYOM 6 (Sonsuzluk). *Tümevarımlı bir küme vardır.*

Tanım göre ω , tümevarımlı kümelerin oluşturduğu sınıfın kesişimi olsun. Böylece

$$\omega = \bigcap \{X : 0 \in X \wedge \forall y (y \in X \Rightarrow y' \in X)\}$$

olur. Sonsuzluk Aksiyomu ve Teorem 7 sayesinde ω bir kümedir. Aksiyom yanlış olsaydı, Teorem 6 sayesinde ω , $\mathbf{V}$ olurdu. Sayfa 49'da Sonsuzluk Aksiyomu'nu kullanmadan ω , $\mathbf{V}$ olmayan bir sınıf olarak tanımlayabileceğiz, ve bu durumda Sonsuzluk Aksiyomu, “ ω bir kümedir” şeklinde verilebilir.

Şimdi

$$\mathbb{N} = \omega \setminus \{0\}$$

olsun. Ayırma Aksiyomu sayesinde ω gibi $\mathbb{N}$ de bir kümedir. Birincisi **doğal sayıları** içerir; ikincisi, **sayma sayılarını**.

- k , ℓ , m , ve n , sabit doğal sayılar gösterecektir;
- i ve j , doğal sayı değişkenidirler.

Teorem 10 (Tümevarım).

1. ω tümevarımlıdır.
2. ω 'nın hiç tümevarımlı özaltkümesi yoktur.

Kanıt. 1. ω tümevarımlıdır çünkü

- a) her tümevarımlı küme 0 'ı içerir, dolayısıyla $0 \in \omega$;
 - b) eğer $k \in \omega$ ise, o zaman her A tümevarımlı kümesi k 'yi içerir, dolayısıyla $k' \in A$; sonuç olarak $k' \in \omega$.
2. Eğer A tümevarımlı ise, o zaman Teorem 6 sayesinde $\omega \subseteq A$. Eğer ayrıca $A \subseteq \omega$ ise, o zaman $A = \omega$. $\square$

Sonraki teorem, tümevarımın en basit aşikâr olmayan uygulamadır.

Teorem 11. *Her doğal sayı ya 0'dır ya da doğal bir sayının ardıllıdır.*

Alıştırma VII. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 12. *Her doğal sayının her elemanı, doğal sayıdır.*

Alıştırma VIII. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 13. ω 'da

$$k \in n \Rightarrow k \subset n.$$

Kanıt. n üzerine tümevarım kullanacağız.

1. 0 'ın hiç elemanı olmadığından 0 'ın her elemanı bir özaltkümedir.
2. Bir m doğal sayısı için tümevarım hipotezi olarak m 'nin her elemanı m 'nin bir özaltkümesi olsun. Bu durumda $m \not\subset m$ olduğundan $m \notin m$, dolayısıyla

$$m \subset m'. \quad (4.1)$$

Şimdi $k \in m'$ olsun. O zaman

$$k \in m \vee k = m.$$

- a) Eğer $k \in m$ ise hipotezden $k \subset m$.
- b) Eğer $k = m$ ise $k \subseteq m$.

Her durumda (4.1) sayesinde $k \subset m'$. Böylece tümevarım tamamlanmıştır. $\square$

Teorem 14. *Ardılları aynı olan doğal sayılar da aynıdır: ω 'da*

$$k' = n' \Rightarrow k = n.$$

Aıştırma IX. Teoremi kanıtlayın.

Peano Aksiyomları, aşağıdaki üç sonuçtur:

1. 0, hiç doğal sayının ardılı olmaz.
2. Teorem 14.
3. Teorem 10.

Sadece bunları kullanarak doğal sayıların sıralanmasını, toplamasını, ve çarpmasını ve bunların özelliklerini elde edebiliriz. Biz aynı şeyi, doğal sayıların küme özelliklerini kullanarak yapıyoruz, çünkü daha kolaydır.

Temel sayılar kuramı, doğal sayıların *küme* oluşturduğunu kullanmaz. Sınıf olarak ω 'yı elde etmek için Sonsuzluk Aksiyomu'nun yukarıdaki biçimi ile ω 'nın küme olduğunu varsaydık. Gerçel analizde ω bir kümedir, çünkü (örneğin) $\mathbb{R}$ 'nin $[0, 1]$ aralığında her a elemanı için, ω 'nın öyle bir A altkümesi vardır ki

$$a = \sum_{i \in A} \frac{1}{2^{i+1}}$$

olur, ve ω 'nın her altkümesi bu şekilde elde edilebilir.

Teorem 15. *Eğer $n \in \omega$ ise, o zaman her k doğal sayısı için*

$$k \subset n \Rightarrow k \in n.$$

Kanıt. Tümevarım kullanacağız.

1. Her k doğal sayısı için $k \not\subset 0$, dolayısıyla

$$k \subset 0 \Rightarrow k \in 0.$$

2. Bir m doğal sayısı için tümevarım hipotezi olarak her k doğal sayısı için

$$k \subset m \Leftrightarrow k \in m$$

olsun. Eğer $k \subset m'$ ise, o zaman $k \subseteq m$ veya $m \in k$. Son durum olmaz çünkü $m \in k$ ise, Teorem 13'ten

$$m \subset k \subset m',$$

ki bu imkânsızdır. Sonuç olarak $k \subseteq m$.

- Eğer $k = m$ ise, o zaman $k \in m'$.
- Eğer $k \subset m$ ise, o zaman $k \in m$, dolayısıyla $k \in m'$.

Tümevarım tamamdır. $\square$

Sonuç olarak ω 'da $\in$ ve $\subset$, aynı bağıntıdır. Özel olarak ω 'da $\in$ bağıntısı bir sıralamadır. Normalde bu sıralama, $<$ yüklemi ile gösteriliyor. Şimdilik bu yüklemi kullanmayalım, çünkü doğal sayıların *küme* olduğunu hâlâ kullanıyoruz.

Teorem 16. ω 'da $\subset$, doğrusal bir sıralamadır: tüm k ve n doğal sayıları için

$$k \subseteq n \vee n \subset k.$$

Kanıt. Tümevarım kullanacağız.

1. Her k için $0 \subseteq k$ (çünkü 0 boştur), dolayısıyla

$$k \subseteq 0 \vee 0 \subset k.$$

2. ω 'da bir m için, her k için,

$$k \subseteq m \vee m \subset k$$

olsun, ama bir k için $k \not\subseteq m'$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} k &\neq m', \\ k &\not\subseteq m \end{aligned} \tag{4.2}$$

olur. İkinci sonuç ve hipotez sayesinde, $m \subset k$ olur. Ayrıca Teorem 15'ten $m \in k$, dolayısıyla

$$m' \subseteq k$$

olur. Şimdi (4.2) sayesinde $m' \subset k$ olur. $\square$

Teorem 17. *€, her doğal sayı iyisırallar; aslında her doğal sayının boş olmayan her altkümesinin kesişimi, verilen altkümenin en küçük elemanıdır.*

Kanıt. Tümevarım kullanacağız.

1. 0'ın boş olmayan hiç altkümesi olmadığından iddia 0 için aşikâr bir şekilde doğrudur.

2. Bir m için iddia doğru olsun, ve

$$0 \subset A \subseteq m'$$

olsun. İki durum vardır.

- Eğer $A = \{m\}$ ise, o zaman m , aşikâr bir şekilde A 'nın diğer elemanlarının elemanıdır, çünkü başka eleman yoktur.
- Diğer durumda $A \setminus \{m\}$ boş değildir, dolayısıyla hipoteze göre $\bigcap(A \setminus \{m\})$ kesişimi, $A \setminus \{m\}$ farkının en küçük elemanıdır. Ayrıca

$$A \setminus \{m\} \subseteq m,$$

dolayısıyla m 'den küçük olduğundan $\bigcap(A \setminus \{m\})$, A 'nın en küçük elemanıdır. $\square$

Teorem 18. $\omega, \in$ tarafından iyisıralanmıştır.

Alıştırma X. Teoremi kanıtlayın.

Alıştırma XI (Güçlü Tümevarım). A , ω 'nın öyle altkümesi olsun ki

- her n doğal sayısı için

$$n \subseteq A \Rightarrow n \in A$$

olsun. (Kısaca A , kapsadığı her doğal sayısı içersin.)

A 'nın ω olduğunu kanıtlayın. *İpucu:* Önce A 'nın her doğal sayısı kapsadığını kanıtlayın.

4.2 Özyineleme

Doğal sayılarda k' , $k + 1$ olarak da yazılabilir.

Teorem 19 (Özyineleme). *Bazı b , A , ve f için*

1) $b \in A$,

2) $f: A \rightarrow A$

olsun. O zaman ω 'dan A 'ya giden bir ve tek bir g göndermesi için, Şekil 1'deki gibi

1) $g(0) = b$,

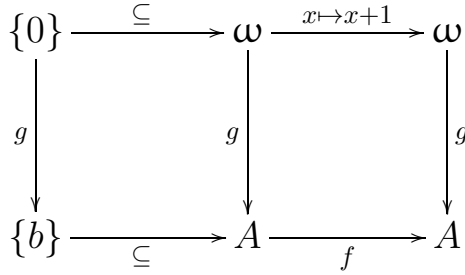
2) her k doğal sayısı için $g(k + 1) = f(g(k))$.

Kanıt. İstedğimiz özellikleri olan bir gönderme varsa, o zaman tümevarımdan tek bir örnek vardır.

Şimdi elemanları gönderme olan bir $\mathcal{C}$ kümesini tanımlayacağız. $\mathcal{C}$ 'nin her h elemanı için,

1) h 'nin tanım kümesi ω 'nın bir altkümesidir, ve

2) herhangi ℓ doğal sayısı için, $h(\ell)$ tanımlanırsa, o zaman



Şekil 1: Özyineleme

- a) ya $\ell = 0$ ve $h(\ell) = b$,
- b) ya da bir k doğal sayısı için $\ell = k + 1$, $h(k)$ tanımlanır, ve

$$h(\ell) = f(h(k)).$$

İstedığımız gibi g göndermesi varsa $\mathcal{C}$ 'nin elemanıdır. Her k doğal sayısı için, A 'nın bir ve tek bir d elemanı için, $\mathcal{C}$ 'nin bir h elemanı için $h(k) = d$ göstereceğiz. Bu şekilde $g(k) = d$ tanımlanabilir.

Yukarıdaki özelliği olan k doğal sayıları, E kümesini oluştursun. Tanım kümesi $\{0\}$ olan bir h göndermesi için $h(0) = b$. O zaman $h \in \mathcal{C}$. Ayrıca $\mathcal{C}$ 'nin herhangi h elemanı için $h(0)$ tanımlanırsa, o zaman $h(0) = b$ olmalıdır, çünkü hiç k doğal sayısı için $k + 1 = 0$ değildir. Bu şekilde $0 \in E$.

Şimdi $k \in E$ olsun. O zaman A 'nın bir ve tek bir d elemanı için, $\mathcal{C}$ 'nin bir h elemanı için $h(k) = d$.

1. Eğer $h(k+1)$ tanımlanırsa, o zaman $\mathcal{C}$ 'nin tanımına göre $h(k+1) = f(d)$, çünkü $k+1 \neq 0$, ve ayrıca herhangi ℓ doğal sayısı için eğer $\ell+1 = k+1$ ise, o zaman $\ell = k$.
2. Eğer $h(k+1)$ tanımlanmazsa, o zaman yeni bir h^* gön-

dermesi için

$$h^*(x) = \begin{cases} h(x), & \text{eğer } h(x) \text{ tanımlanırsa,} \\ f(d), & \text{eğer } x = k + 1 \text{ ise.} \end{cases}$$

O zaman $h^* \in \mathcal{C}$ ve $h^*(k + 1) = f(d)$.

Bu şekilde, her durumda, $\mathcal{C}$ 'nin bir h elemanı için $h(k + 1) = f(d)$.

Mümkümse $d^* \in A$, $d^* \neq f(d)$ olsun, ama $\mathcal{C}$ 'nin bir h elemanı için $h(k + 1) = d^*$ olsun. O zaman $k + 1 \neq 0$ olduğundan bir ℓ doğal sayısı için $\ell + 1 = k + 1$, $h(\ell)$ tanımlanır, ve $d^* = f(h(\ell))$. Ama bu durumda $\ell = k$, dolayısıyla $h(\ell) = d$ ve $d^* = f(d)$.

Sonuç olarak $k + 1 \in E$.

Tümevarım ile $E = \omega$. □

Özyineleme yöntemiyle ω 'da toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayabiliriz:

$$k + (n + 1) = (k + n) + 1, \quad k \cdot 1 = k, \quad k \cdot (n + 1) = kn + k.$$

Şimdi tümevarım ve kalan Peano Aksiyomları ile toplamının ve çarpmanın özelliklerini kanıtlayabiliriz; ayrıca ω 'nın sıralamasını tanımlayıp özelliklerini kanıtlayabiliriz. Ondan sonra $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ yapılarını elde edebiliriz.

Doğal sayılar, *sonlu ordınaller* olacak; ω , en küçük sonsuz ordinal olacak.

5 Ordinal Sayılar

5.1 Ordinaller

Sayfa 35'te geçişli iki-konumlu bağıntıları tanımladık. Sınıflar tek-konumlu bağıntılardır, ve bunların biri de **geçişli** olabilir, eğer sınıfın her elemanı, sınıfın bir altkümesi ise. O halde geçişli sınıflar, öyle **A** sınıfları ki

$$c \in b \wedge b \in \mathbf{A} \Rightarrow c \in \mathbf{A}$$

olur. Örneğin

- Teorem 12'ye göre ω geçişlidir;
- Teorem 13'e göre ω 'nın her elemanı da geçişlidir.

Tanıma göre

- 1) geçişli olan
- 2) $\in$ tarafından iyisıralanmış olan

bir küme bir **ordinal sayıdır**.

- Teorem 17 sayesinde ω 'nın her elemanı bir ordinaldir;
- Teorem 18 sayesinde ω bir ordinaldir.

Alıştırma XII. Bulun

- (a) $\in$ bağıntısının geçişli olduğu, geçişli olmayan bir küme;
- (b) $\in$ bağıntısının geçişli olmadığı, geçişli olan bir küme.

Ordinaller

ON

sınıfını oluştursun. Küçük Yunan harfleri her zaman $\mathbf{ON}$ 'nin elemanlarını gösterecektir. Özel olarak

- α, β, γ gibi harfler sabit ordinaler gösterecektir;
- ξ, η , ve ζ , ordinal değişkenidirler.

Örneğin

$$\{\xi: \varphi(\xi)\} = \{x: x \in \mathbf{ON} \wedge \varphi(x)\}.$$

Teorem 20. *Her ordinalin her elemanı bir ordinaldir, dolayısıyla $\mathbf{ON}$ geçişlidir.*

Kanıt. $\alpha \in \mathbf{ON}$ ve $b \in \alpha$ olsun. O zaman $b \subseteq \alpha$, dolayısıyla α gibi $b, \in$ tarafından iyisıralanmıştır.

Şimdi $c \in b$ olsun. O zaman $c \in \alpha$, dolayısıyla $c \subseteq \alpha$. Özel olarak $d \in c$ ise $d \in \alpha$. Bu durumda d, c , ve b, α 'nın elemanıdır; ayrıca $d \in c$ ve $c \in b$, dolayısıyla $d \in b$ çünkü α 'da $\in$ geçişlidir. Sonuç olarak $c \subseteq b$. O halde b geçişlidir.

Böylece rastgele bir ordinalin rastgele elemanı, hem geçişlidir, hem de $\in$ tarafından iyisıralanmıştır, dolayısıyla ordinaldir. $\square$

Lemma 2. $\mathbf{ON}, \in$ tarafından sıralanmıştır.

Kanıt. $\alpha \in \mathbf{ON}$ olsun. O zaman α 'da $\in$ bağıntısı yansısız olduğundan $\alpha \notin \alpha$ olur, çünkü $\alpha \in \alpha$ ise α 'nın bir β elemanı için $\beta \in \beta$.

Eğer $\beta \in \alpha$ ve $\gamma \in \beta$ ise, α geçişli olduğundan $\gamma \in \alpha$. $\square$

Lemma 3. $\mathbf{ON}$ 'de $\in$ ve $\subset$ sıralamaları aynıdır.

Kanıt. Kanıtın iki parçası vardır.

1. $\boxed{\alpha \in \beta \Rightarrow \alpha \subset \beta}$: $\alpha \in \beta$ olsun. β geçişli olduğundan $\alpha \subseteq \beta$. β 'da $\in$ yansısız olduğundan $\alpha \neq \beta$. Bu şekilde $\alpha \subset \beta$.

2. $\boxed{\alpha \subset \beta \Rightarrow \alpha \in \beta}$: $\alpha \subset \beta$ olsun. O zaman $\beta \setminus \alpha$ kümesi boş değildir. $\gamma = \min(\beta \setminus \alpha)$ olsun. O zaman $\gamma \in \beta$. Biz $\boxed{\gamma = \alpha}$ kanıtlayacağız. Bu kanıtın iki parçası vardır.

- a) $\boxed{\gamma \subseteq \alpha}$: $\delta \in \gamma$ olsun. O zaman β geçişli olduğundan $\delta \in \beta$. Ayrıca $\delta \notin \beta \setminus \alpha$, çünkü $\delta \in \min(\beta \setminus \alpha)$. O halde $\delta \in \alpha$. Böylece $\gamma \subseteq \alpha$.
- b) $\boxed{\alpha \subseteq \gamma}$: $\delta \in \alpha$ olsun. O zaman $\delta \in \beta$, çünkü $\alpha \subset \beta$, dolayısıyla $\delta \notin \beta \setminus \alpha$. Ama $\delta \in \gamma$, $\delta = \gamma$, veya $\gamma \in \delta$; ve son iki inkân olmaz. Zira $\gamma \in \beta \setminus \alpha$ olduğundan $\delta \neq \gamma$; ve $\gamma \notin \alpha$ olduğundan $\gamma \notin \delta$, çünkü $\delta \in \alpha$. Bu şekilde $\alpha \subseteq \gamma$. $\square$

Teorem 21. Her ordinalde $\in$ ve $\subset$ sıralamaları aynıdır.

Alıştırma XIII. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi ON'nin ve her elemanın $\in$ veya $\subset$ sıralamasını, $<$ yüklemi ile yazalım.

Lemma 4. ON'nin $<$ sıralaması doğrusaldır.

Kanıt. $\alpha \not\leq \beta$ olsun. $\boxed{\beta < \alpha}$ göstereceğiz.

Varsayımdan $\alpha \not\subseteq \beta$, dolayısıyla $\alpha \setminus \beta \neq \emptyset$. $\gamma = \min(\alpha \setminus \beta)$ olsun. O zaman $\gamma \in \alpha$, yani $\gamma < \alpha$. $\boxed{\gamma = \beta}$ göstereceğiz.

$\boxed{\gamma \subseteq \beta}$: $\delta \in \gamma$ olsun. O zaman $\delta < \min(\alpha \setminus \beta)$, ama $\delta \in \alpha$, dolayısıyla $\delta \in \beta$.

$\boxed{\gamma \not\subseteq \beta}$: $\gamma \in \alpha \setminus \beta$ olduğundan $\gamma \notin \beta$, yani $\gamma \not\subseteq \beta$. $\square$

Teorem 22. ON'nin $<$ doğrusal sıralaması bir iyisıralamadır. Ayrıca ON'nin boş olmayan her alt sınıfının en küçük elemanı vardır.

Kanıt. $A \subseteq \text{ON}$ ve $\alpha \in A$ olsun.

- $\alpha \cap \mathbf{A} = \emptyset$ ise $\alpha = \min(\mathbf{A})$.
- $\alpha \cap \mathbf{A} \neq \emptyset$ ise $\min(\alpha \cap \mathbf{A}) = \min(\mathbf{A})$. □

Teorem 23 (Burali-Forti Paradoksu). *$\mathbf{ON}$ küme değildir.*

Kanıt. Şimdi Teorem 20 ve 22'den $\mathbf{ON}$ hem geçişli hem $\in$ tarafından iyisıralanmıştır. Tanıma göre $\mathbf{ON}$ 'nin elemanlarının aynı özellikleri vardır. Ama $\mathbf{ON} \in$ tarafından sıralanmış olduğundan kendinin elemanı olamaz. Bu şekilde $\mathbf{ON}$ küme olamaz. □

Teorem 24.

1. $\emptyset \in \mathbf{ON}$.
2. $\alpha \in \mathbf{ON}$ ise $\alpha' \in \mathbf{ON}$ ve ayrıca her β ordinali için

$$\beta \leq \alpha \vee \alpha' \leq \beta.$$

Alıştırma XIV. Teoremi kanıtlayın.

Tanıma göre ne 0 ne bir ardıl olan bir ordinal bir **limittir**. O zaman ω bir limittir ve (Teorem 11 sayesinde) en küçük limittir. Sonsuzluk Aksiyomu'nu kullanmadan ω , ne limit olan ne limit içeren ordinallerin oluşturduğu sınıf olarak tanımlanabilir. Şimdi sayfa 38'de dediğimiz gibi Sonsuzluk Aksiyomu, “ ω bir kümedir” şeklinde verilebilir.

Teorem 25. *Sıfır olmayan bir α ordinalinin limit olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\beta < \alpha \Rightarrow \beta' < \alpha.$$

Alıştırma XV. Teoremi kanıtlayın.

AKSİYOM 7 (Bileşim). *Her kümenin bileşimi bir kümedir.*

Varsa, doğrusal sıralanmış bir sınıfın bir A altkümesinin en küçük üstsınırı, A 'nın **supremumudur** ve

$$\sup A$$

olarak yazılır.

Teorem 26. $\mathbf{ON}$ 'nin her altkümesinin supremumu vardır. Aslında $B \subset \mathbf{ON}$ ise

$$\sup B = \bigcup B.$$

Alıştırma XVI. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi Burali-Forti Paradoksu'nun (yani Teorem 23'ün) başka bir kanıtı vardır. Her ordinalin daha büyüğü olduğundan $\mathbf{ON}$ 'nin en büyük elemanı yoktur, dolayısıyla $\mathbf{ON}$ 'nin $\mathbf{ON}$ 'de olan üstsınırı yoktur. $\mathbf{ON}$ 'nin her altkümesinin üstsınırı olduğundan $\mathbf{ON}$ 'nin kendisi küme olamaz.

5.2 Tümevarım ve Özyineleme

Teorem 27 (Ordinal Tümevarım). $A \subseteq \mathbf{ON}$ olsun. Eğer

- 1) $0 \in A$,
- 2) Her β için

$$\beta \in A \Rightarrow \beta' \in A,$$

- 3) her γ limiti için

$$\gamma \subseteq A \Rightarrow \gamma \in A \tag{5.1}$$

ise, o zaman $A = \mathbf{ON}$.

Kanıt. Verilen koşullar altında $\mathbf{ON} \setminus A$ farkının en küçük elemanı olamaz. Zira mümkünse $\alpha = \min(\mathbf{ON} \setminus A)$ olsun.

1. $\alpha = 0$ ise $\alpha \in \mathbf{A}$.
2. $\alpha = \beta'$ ise $\beta < \alpha$ olduğundan $\beta \in \mathbf{A}$, ama bu durumda $\beta' \in \mathbf{A}$, yani $\alpha \in \mathbf{A}$.
3. Varsayımımıza göre $\beta < \alpha$ ise $\beta \in \mathbf{A}$. Bu şekilde $\alpha \subseteq \mathbf{A}$. Eğer ayrıca α bir limit ise, o zaman (5.1) sayesinde α da $\mathbf{A}$ 'nın elemanı olmalıdır.

Bu şekilde her ordinal ya 0, ya bir ardıl, ya da bir limit olduğundan $\alpha \in \mathbf{A}$, ama $\alpha = \min(\mathbf{ON} \setminus \mathbf{A})$ varsayımına göre $\alpha \notin \mathbf{A}$. Öyleyse varsayım imkânsızdır. $\mathbf{ON}$ 'nin her boş olmayan altkümesinin en küçük elemanı var olduğundan $\mathbf{ON} \setminus \mathbf{A} = \emptyset$, dolayısıyla $\mathbf{A} = \mathbf{ON}$. $\square$

Ordinal tümevarım ile Teorem 28'i, Teorem 30'u, Teorem 34'ü, ve daha sonraki teoremler kanıtlayacağız. Ordinal tümevarım kullanılan bir kanıtın üç adımı vardır:

- 1) sıfır adımı,
- 2) ardıl adımı, ve
- 3) limit adımı.

Ayrıca kanıtta iki tümevarım hipotezi vardır. Ordinal Tümevarım Teoremini yazarken kullandığımız harflerde,

- ardıl adımının hipotezi, $\beta \in \mathbf{A}$;
- limit adımının hipotezi, $\gamma \subseteq \mathbf{A}$, yani

$$\forall \xi (\xi < \gamma \Rightarrow \xi \in \mathbf{A}).$$

Teorem 28 (Ordinal Özyineleme). *Varsayımlarımız,*

- 1) $\theta \in \mathbf{ON}$,
- 2) $\mathbf{F}: \mathbf{ON} \rightarrow \mathbf{ON}$.

O zaman bir ve tek bir $\mathbf{H}$ ordinal işlemi için

- 1) $\mathbf{H}(0) = \theta$,
- 2) her β ordinali için $\mathbf{H}(\beta') = \mathbf{F}(\mathbf{H}(\beta))$,
- 3) her γ limiti için $\mathbf{H}(\gamma) = \sup\{\mathbf{H}(\xi): \xi < \gamma\}$.

Kanıt. Her α için, tanım kümesi $\{\xi: \xi \leq \alpha\}$ olan bir ve tek bir h_α göndermesi için,

- 1) $h_\alpha(0) = \theta$,
- 2) $\beta < \alpha$ ise $h_\alpha(\beta') = \mathbf{F}(h_\alpha(\beta))$,
- 3) $\gamma \leq \alpha$ ve limit ise $h_\alpha(\gamma) = \sup\{h_\alpha(\xi): \xi < \gamma\}$.

Bunu kanıtlamak için, ordinal tümevarım kullanacağız.

1. $h_0, h_0(0) = \theta$ ile tanımlanabilir ve tanımlanmalıdır. Yani $\alpha = 0$ durumunda iddia doğrudur.

2. Eğer $\alpha = \delta$ durumunda iddia doğru ise $h_{\delta'}$,

$$h_{\delta'}(\xi) = \begin{cases} h_\delta(\xi), & \xi \leq \delta \text{ durumunda,} \\ \mathbf{F}(h_\delta(\delta)), & \xi = \delta' \text{ durumunda} \end{cases}$$

kuralı tarafından tanımlanabilir. Ayrıca $h_{\delta'}$ bu şekilde tanımlanmalıdır, çünkü hipoteze göre

$$h_{\delta'} \upharpoonright \{\xi: \xi \leq \delta\} = h_\delta$$

olmalıdır. Bundan dolayı $\alpha = \delta'$ durumunda iddia doğrudur.

3. Benzer şekilde bir δ için $\alpha < \delta$ durumlarında iddia doğru ise, o zaman $\alpha < \beta < \delta$ durumlarında $h_\alpha(\alpha) = h_\beta(\alpha)$. Eğer ayrıca δ bir limit ise, o zaman h_δ ,

$$h_\delta(\xi) = \begin{cases} h_\xi(\xi), & \xi < \delta \text{ durumunda,} \\ \sup\{h_\xi(\xi): \xi < \delta\}, & \xi = \delta \text{ durumunda} \end{cases}$$

kuralı tarafından tanımlanabilir ve tanımlanmalıdır, ve bu şekilde $\alpha = \delta$ durumunda iddia doğrudur.

Ordinal tümevarımımız bitti. Şimdi $\mathbf{H}(\xi) = h_\xi(\xi)$ tanımlanabilir ve tanımlanmalıdır. $\square$

Bölümler 6, 7, ve 8'de ordinal özyinelemeyle ordinal toplama, çarpma, ve kuvvet alma işlemlerini tanımlayacağız.

5.3 Normal işlemler

Şimdi $\mathbf{F}$, herhangi ordinal işlem olsun. Ordinal aksiyomlarına göre $\{\mathbf{F}(\xi): \xi < \alpha\}$ sınıfı her zaman bir kümedir, dolayısıyla Teorem 26'ya göre supremumu vardır. Bu supremum,

$$\sup_{\xi < \alpha} \mathbf{F}(\xi)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 29. *Her α ordinali için*

$$\sup_{\xi < \alpha} \xi = \begin{cases} 0, & \alpha = 0 \text{ durumunda,} \\ \beta, & \alpha = \beta' \text{ durumunda,} \\ \alpha, & \alpha \text{'nin limit olduğu durumda.} \end{cases}$$

Alıştırma XVII. Teoremi kanıtlayın.

Alıştırma XVIII. $\{\xi': \xi < \alpha\}$ kümesinin supremumunu hesaplayın.

Eğer

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \mathbf{F}(\alpha) \leq \mathbf{F}(\beta)$$

ise, o zaman $\mathbf{F}$ artandır. Eğer

$$\alpha < \beta \Rightarrow \mathbf{F}(\alpha) < \mathbf{F}(\beta) \quad (5.2)$$

ise, o zaman $\mathbf{F}$ kesin artandır. Eğer

- 1) $\mathbf{F}$ kesin artan ve
- 2) her α limiti için

$$\mathbf{F}(\alpha) = \sup_{\xi < \alpha} \mathbf{F}(\xi) \quad (5.3)$$

ise, o zaman $\mathbf{F}$ 'ye **normal** densin.

Alıştırma XIX. $\xi \mapsto \xi'$ işleminin kesin artan olup normal olmadığını gösterin.

Alıştırma XX. Normal olan bir işlem örneği verin.

Sonraki teoremin ilk kullanımı, Teorem 35'in kanıtında olacaktır.

Teorem 30. $\mathbf{F}: \mathbf{ON} \rightarrow \mathbf{ON}$ olsun. Eğer

1) her α için $\mathbf{F}(\alpha) < \mathbf{F}(\alpha')$ ve

2) her α limiti için (5.3) doğru

ise, o zaman $\mathbf{F}$ normaldir.

Kanıt. $\mathbf{F}$ 'nin kesin artan olduğunu göstermek yeter. (5.2) gerektirmesini β üzerinden tümevarım kullanarak kanıtlayacağız.

1. $\beta = 0$ ise, (5.2) iddiası doğrudur, çünkü hiçbir zaman $\alpha < 0$ değildir.

2. $\beta = \gamma$ durumunda (5.2) iddia doğru olsun. Eğer $\alpha < \gamma'$ ise, o zaman $\alpha \leq \gamma$, dolayısıyla

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\alpha) &\leq \mathbf{F}(\gamma) && [\text{tümevarım hipotezi}] \\ &< \mathbf{F}(\gamma'). && [\text{varsayım}] \end{aligned}$$

3. γ limit ve $\alpha < \gamma$ ise, o zaman $\alpha < \alpha' < \gamma$, dolayısıyla

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\alpha) &< \mathbf{F}(\alpha') && [\text{varsayım}] \\ &\leq \sup_{\xi < \gamma} \mathbf{F}(\xi) && [\text{supremumun tanımı}] \\ &= \mathbf{F}(\gamma). && [\text{varsayım}] \end{aligned}$$

(Bu adımda bir tümevarım hipotezi kullanılmıyor.) □

Sonraki teoremin ilk kullanımı, Teorem 36'nın kanıtında olacaktır.

Teorem 31. $\mathbf{F}: \mathbf{ON} \rightarrow \mathbf{ON}$ ve normal olsun. O zaman $\mathbf{ON}$ 'nin boş olmayan her A altkümesi için

$$\mathbf{F}(\sup(A)) = \sup_{\xi \in A} \mathbf{F}(\xi). \quad (5.4)$$

Kanıt. A kümesinin supremumu α olsun. $\mathbf{F}$ kesin artan olduğundan $\beta \in A$ ise $\mathbf{F}(\beta) \leq \mathbf{F}(\alpha)$. Bundan dolayı, eğer $\alpha \in A$ ise, o zaman

$$\sup_{\xi \in A} \mathbf{F}(\xi) = \mathbf{F}(\alpha),$$

yani (5.4) doğrudur. Şimdi $\alpha \notin A$ olsun. O zaman α ardıl olamaz. A boş olmadığından $\alpha = 0$ olamaz, dolayısıyla α limitlidir. Bu durumda $\mathbf{F}$ normal olduğundan

$$\mathbf{F}(\alpha) = \sup_{\xi < \alpha} \mathbf{F}(\xi). \quad (5.5)$$

Ayrıca

$$\sup_{\xi \in A} \mathbf{F}(\xi) \leq \sup_{\xi < \alpha} \mathbf{F}(\xi), \quad (5.6)$$

çünkü $A \subseteq \{\xi: \xi < \alpha\}$. Eğer $\beta < \alpha$ ise, A 'nın bir γ elemanı için $\beta \leq \gamma < \alpha$, dolayısıyla $\mathbf{F}(\beta) \leq \mathbf{F}(\gamma) \leq \sup_{\xi \in A} \mathbf{F}(\xi)$. Bu şekilde

$$\sup_{\xi < \alpha} \mathbf{F}(\xi) \leq \sup_{\xi \in A} \mathbf{F}(\xi). \quad (5.7)$$

Sonuç olarak (5.5), (5.6), ve (5.7) beraber (5.4) eşitliğini tekrar gerektirir. $\square$

5.4 Süreklilik

Normallik kavramının yerine gerçel analizden gelen süreklilik kavramını kullanabiliriz. Ordinallerde, kesin artan bir işlemin normal olması için gerek ve yeter bir koşul, işlemin sürekli olmasıdır. Bu sonucu kurmak, bu altbölümün işidir.

Tekrar $\mathbf{F}: \mathbf{ON} \rightarrow \mathbf{ON}$ olsun. Varsa, $\mathbf{F}$ 'nin bir α noktasındaki sürekliliği gerçel analizdeki gibi tanımlanır. Öyleyse eğer

$$\varepsilon_0 < \mathbf{F}(\alpha) < \varepsilon_1$$

koşulunu sağlayan her ε_0 ve ε_1 için,

$$\delta_0 < \alpha < \delta_1$$

koşulunu sağlayan her δ_0 ve δ_1 için,

$$\forall \xi (\delta_0 < \xi < \delta_1 \Rightarrow \varepsilon_0 < \mathbf{F}(\xi) < \varepsilon_1)$$

ise, o zaman $\mathbf{F}$, α 'da **süreklidir**. Eğer $\mathbf{F}(\alpha) = 0$ veya $\alpha = 0$ ise, o zaman $\varepsilon_0 = -1$ veya $\delta_0 = -1$ olabilir.

Lemma 5. *$\mathbf{ON}$ 'de her işlem, limit olmayan her noktada süreklidir.*

Alıştırma XXI. Lemmayı kanıtlayın.

Teorem 32. *Kesin artan bir ordinal işlemin normal olması için yeter ve gerek bir koşul, işlemin sürekli olmasıdır.*

Alıştırma XXII. Teoremi kanıtlayın.

Alıştırma XXIII. Sürekli olup normal olmayan bir işlem örneği verin.

6 Ordinal toplama

6.1 Tanım ve özellikler

Özyineli tanıma göre her α ordinali için

$$\alpha + 0 = \alpha, \quad (6.1)$$

$$\alpha + \beta' = (\alpha + \beta)', \quad (6.2)$$

$$\gamma \text{ limit ise } \alpha + \gamma = \sup_{\xi < \gamma} (\alpha + \xi). \quad (6.3)$$

Şekil 2'ye bakın. Ordinal toplamanın özelliklerinin çoğu, tümevarım ile kanıtlanır; ama ilk teoremimiz, tümevarımdan değildir.

Teorem 33. $\alpha + 1 = \alpha'$.

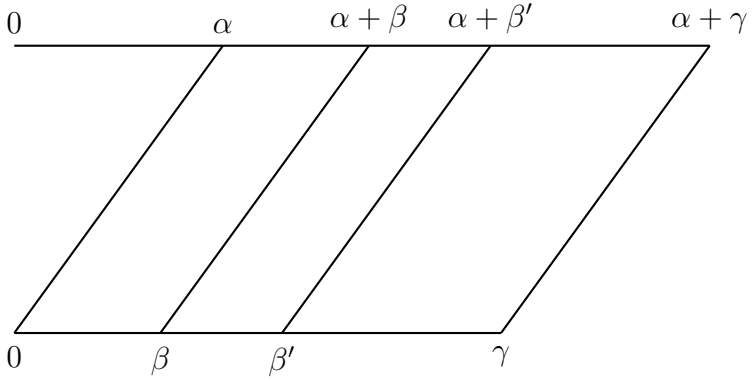
$$\begin{aligned} \text{Kanıt.} \quad \alpha + 1 &= \alpha + 0' \\ &= (\alpha + 0)' \quad [(6.2) \text{ tanımından}] \\ &= \alpha'. \quad [(6.1) \text{ tanımından}] \quad \square \end{aligned}$$

Teorem 34. Her α için $0 + \alpha = \alpha$.

Kanıt. Ordinal tümevarım kullanacağız.

1. Eğer $\alpha = 0$ ise

$$\begin{aligned} 0 + \alpha &= 0 + 0 && [\text{varsayımdan}] \\ &= 0 && [(6.1) \text{ tanımından}] \\ &= \alpha. && [\text{varsayımdan}] \end{aligned}$$



Şekil 2: Ordinal toplama

2. Eğer

$$0 + \beta = \beta \quad (6.4)$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned} 0 + \beta' &= (0 + \beta)' && [(6.2) \text{ tanımından}] \\ &= \beta'. && [(6.4) \text{ hipotezinden}] \end{aligned}$$

3. Bir α limiti için

$$\forall \xi (\xi < \alpha \Rightarrow 0 + \xi = \xi) \quad (6.5)$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned} 0 + \alpha &= \sup_{\xi < \alpha} (0 + \xi) && [(6.3) \text{ tanımından}] \\ &= \sup_{\xi < \alpha} \xi && [(6.5) \text{ hipotezinden}] \\ &= \alpha. && [\text{Teorem 29'dan}] \quad \square \end{aligned}$$

Alıştırma XXIV. Aşağıdaki kanıt nerede yanlışdır?

Her α için $1 + \alpha = \alpha'$ kanıtlayacağız.

1. $1 + 0 = 1 = 0'$.

2. $1 + \beta = \beta'$ ise, o zaman

$$1 + \beta' = (1 + \beta)' = (\beta')'.$$

3. γ limit ve $\forall \xi (\xi < \gamma \Rightarrow 1 + \xi = \xi')$ ise

$$1 + \gamma = \sup_{\xi < \gamma} (1 + \xi) = \sup_{\xi < \gamma} (\xi') = \gamma'.$$

Böylece her α için $1 + \alpha = \alpha'$.

Teorem 35. Her α ordinali için $\xi \mapsto \alpha + \xi$ normaldir.

Kanıt. Teorem 30'dan $\alpha + \beta < \alpha + \beta'$ göstermek yeter. Ayrıca

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &< (\alpha + \beta)' \\ &= \alpha + \beta'. \end{aligned} \quad [(6.2) \text{ tanımından}] \quad \square$$

Örneğin Şekil 3'e bakın. Teorem 19'u kullanan resmi özyineli tanıma göre,

$$\omega \cdot 0 = 0, \quad \omega \cdot 1 = \omega, \quad \omega \cdot (k + 1) = \omega \cdot k + \omega.$$

Bu şekilde $\omega \cdot n$, “ ω 'dır n kere” veya “ ω 'nın n katıdır.” Ayrıca

$$\omega^2 = \omega \cdot \omega = \sup_{i < \omega} (\omega \cdot i).$$

Alıştırma XXV. $\xi \mapsto \xi \cdot 2$ göndermesi kesin artan mıdır? Sürekli midir?

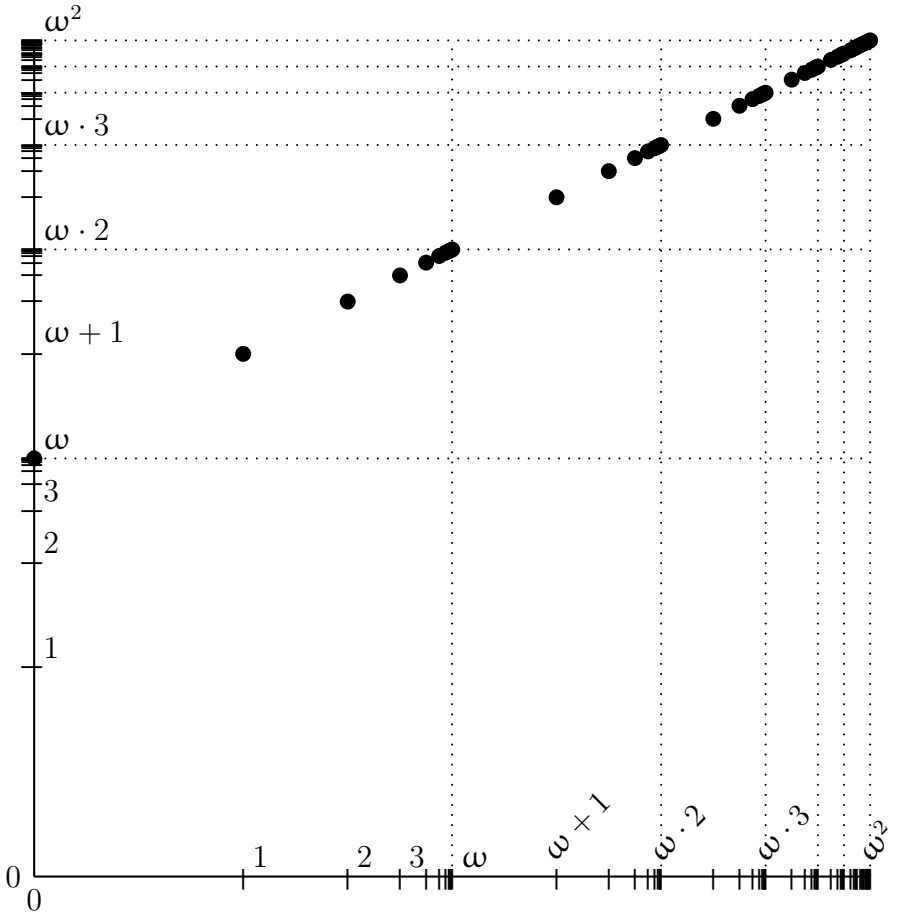
Alıştırma XXVI. Aşağıdaki kanıt nerede yanlış?

Her α için, her β için, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ kanıtlayacağız.

1. $\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha$.

2. Eğer $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ise, o zaman

$$\alpha + \beta' = (\alpha + \beta)' = (\beta + \alpha)' = \beta' + \alpha.$$



Şekil 3: $\eta = \omega + \xi$ denkleminin grafiği

3. Eğer γ limit ve $\forall \xi (\xi < \gamma \Rightarrow \alpha + \xi = \xi + \alpha)$ ise, o zaman

$$\alpha + \gamma = \sup_{\xi < \gamma} (\alpha + \xi) = \sup_{\xi < \gamma} (\xi + \alpha) = \gamma + \alpha.$$

Bu şekilde her durumda $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Teorem 36. *Ordinal toplama birleşmelidir.*

Kanıt. Her γ için, tümevarım kullanarak tüm α ve β için

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

göstereceğiz.

$$\begin{aligned} 1. \quad \alpha + (\beta + 0) &= \alpha + \beta && [(6.1) \text{ tanımından}] \\ &= (\alpha + \beta) + 0. && [(6.1) \text{ tanımından}] \end{aligned}$$

2. Eğer

$$\alpha + (\beta + \delta) = (\alpha + \beta) + \delta \quad (6.6)$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned} \alpha + (\beta + \delta') &= \alpha + (\beta + \delta)' && [(6.2) \text{ tanımından}] \\ &= (\alpha + (\beta + \delta))' && [(6.2) \text{ tanımından}] \\ &= ((\alpha + \beta) + \delta)' && [(6.6) \text{ hipotezinden}] \\ &= (\alpha + \beta) + \delta'. && [(6.2) \text{ tanımından}] \end{aligned}$$

3. δ limit olsun, ve

$$\forall \xi (\xi < \delta \Rightarrow \alpha + (\beta + \xi) = (\alpha + \beta) + \xi) \quad (6.7)$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned} &(\alpha + \beta) + \delta \\ &= \sup_{\xi < \delta} ((\alpha + \beta) + \xi) && [(6.3) \text{ tanımı}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\xi < \delta} (\alpha + (\beta + \xi)) && [(6.7) \text{ hipotezi}] \\
&= \alpha + \sup_{\xi < \delta} (\beta + \xi) && [\xi \mapsto \alpha + \xi \text{ normaldir}] \\
&= \alpha + (\beta + \delta). && [(6.3) \text{ tanımı}] \quad \square
\end{aligned}$$

Teorem 37. $k < \omega$ ve $\ell < \omega$ ise $\omega \cdot (k + \ell) = \omega \cdot k + \omega \cdot \ell$.

Alıştırma XXVII. Teoremi kanıtlayın. (Tümevarım kullanın.)

Teorem 38. Her $\xi \mapsto \xi + \alpha$ göndermesi artandır.

Kanıt. $\beta \leq \gamma$ olsun. α üzerinden tümevarım kullanarak

$$\beta + \alpha \leq \gamma + \alpha$$

kanıtlayacağız.

1. $\beta + 0 = \beta \leq \gamma = \gamma + 0$.
2. $\beta + \alpha = \gamma + \alpha$ ise tabii ki

$$\beta + \alpha' = (\beta + \alpha)' = (\gamma + \alpha)' = \gamma + \alpha'.$$

$\beta + \alpha < \gamma + \alpha$ ise, Teorem 25'e göre

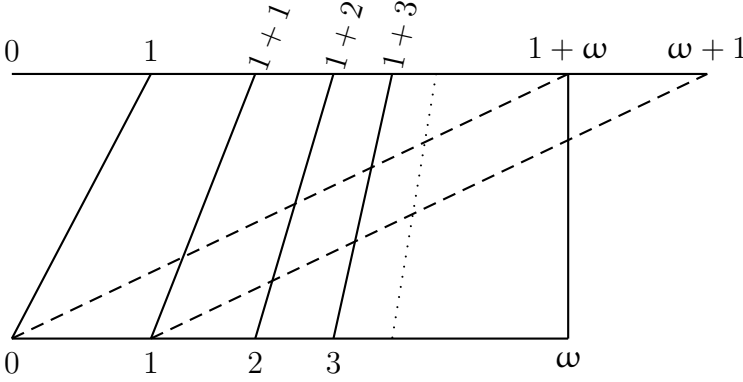
$$\beta + \alpha' = (\beta + \alpha)' \leq \gamma + \alpha < (\gamma + \alpha)' = \gamma + \alpha'.$$

3. Eğer δ limit ise

$$\forall \xi (\xi < \delta \Rightarrow \beta + \xi < \gamma + \xi)$$

olsun. O zaman

$$\beta + \delta = \sup_{\xi < \delta} (\beta + \xi) \leq \sup_{\xi < \delta} (\gamma + \xi) = \gamma + \delta. \quad \square$$



Şekil 4: $1 + \omega = \omega < \omega + 1$

6.2 Hesaplamalar

Bu altbölümün teoremleri tümevarım kullanmaz. İlk olarak ordinal toplama değişmeli değildir.

Teorem 39. $1 + \omega = \omega$.

Kanıt. $1 + \omega = \sup_{i < \omega} (1 + i) = \omega$. Şekil 4'e bakın. □

Teoremin aşağıdaki sonucun özel bir durumu, Şekil 5'te gösteriliyor.

Sonuç. $k < \omega$ ve $1 \leq n < \omega$ ise

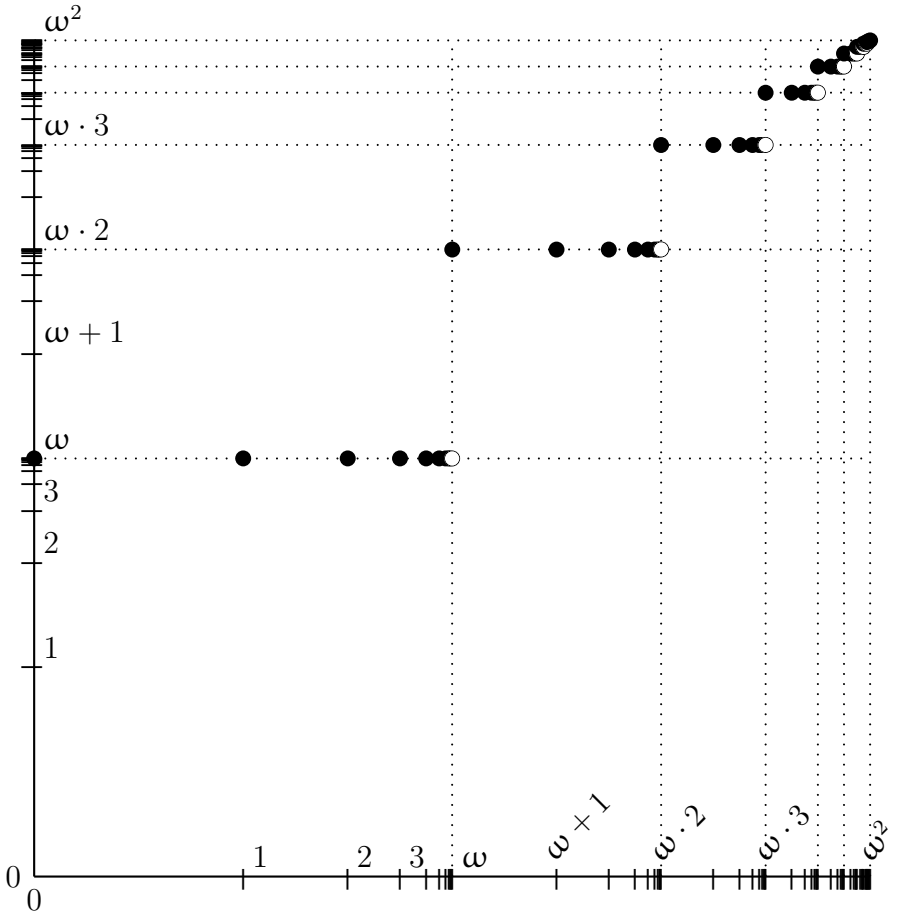
$$k + \omega \cdot n = \omega \cdot n.$$

Alıştırma XXVIII. Sonucu kanıtlayın.

Teorem 40 (Çıkarma). $\alpha \leq \beta$ ise

$$\alpha + \xi = \beta \tag{6.8}$$

denkleminin bir ve tek bir çözümü vardır.



Şekil 5: $\eta = \xi + \omega$ denkleminin grafiği

Kanıt. Denklemin çözümü varsa, Teorem 35'e göre tek çözüm vardır.

Teoremler 34 ve 38'den $\alpha + \beta \geq \beta$, dolayısıyla $\{\xi: \alpha + \xi \leq \beta\}$ sınıfının β' üstsınırı vardır. Şimdi γ , sınıfının supremumu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\alpha + \gamma &= \alpha + \sup_{\alpha + \xi \leq \beta} \xi \\ &= \sup_{\alpha + \xi \leq \beta} (\alpha + \xi) \leq \beta, \\ (\alpha + \gamma)' &= \alpha + \gamma' > \beta,\end{aligned}$$

dolayısıyla $\alpha + \gamma = \beta$. □

Alıştırma XXIX. $\alpha \leq \beta$ varsayınca, $\{\xi: \alpha + \xi \geq \beta\}$ sınıfının boş olmayıp sınıfın en küçük elemanının (6.8) denkleminin çözümü olduğunu gösterin.

Teorem 41. *Eğer $\alpha < \omega^2$ ise, o zaman bir ve tek bir şekilde*

$$\alpha = \omega \cdot k + m. \quad (6.9)$$

Kanıt. $\omega^2 = \sup_{i < \omega} \omega \cdot i$ olduğundan

$$\{i: \alpha < \omega \cdot i\}$$

kümesi boş değildir. Ayrıca küme 0'ı içermez çünkü $\omega \cdot 0 = 0$. Sonuç olarak bir k için

$$\begin{aligned}k + 1 &= \min\{i: \alpha < \omega \cdot i\}, \\ \omega \cdot k &\leq \alpha < \omega \cdot (k + 1).\end{aligned}$$

Teorem 40 sayesinde bir m için (6.9) doğrudur. Şimdi bazı ℓ ve n için $\beta = \omega \cdot \ell + n$ olsun. Eğer $k < \ell$ ise, o zaman $\alpha < \beta$. Eğer $k = \ell$ ama $m < n$ ise, o zaman $\alpha < \beta$. □

ω^2 kümesi toplama altında kapalıdır, ve toplama kuralı,

$$(\omega \cdot k + \ell) + (\omega \cdot m + n) = \omega \cdot (k + m) + n.$$

Alıştırma XXX. $\alpha = \omega \cdot 17 + 6$ ve $\beta = \omega \cdot 1000 + 5$ ise $\alpha + \beta$ toplamını hesaplayın.

7 Ordinal çarpma

7.1 Tanım ve özellikler

Özyineli tanıma göre her α için

$$\begin{aligned}\alpha \cdot 0 &= 0, \\ \alpha \cdot \beta' &= \alpha \cdot \beta + \alpha, \\ \gamma \text{ limit ise } \alpha \cdot \gamma &= \sup_{\xi < \gamma} \alpha \cdot \xi.\end{aligned}$$

Şekil 6'ya bakın. Ordinal çarpma hakkında ilk teoremimizin bir şıkkı tümevarım kullanmaz; kalanlar tümevarım kullanıyor.

Teorem 42.

1. $\alpha \cdot 1 = \alpha$.
2. $1 \cdot \alpha = \alpha$.
3. $0 \cdot \alpha = 0$.

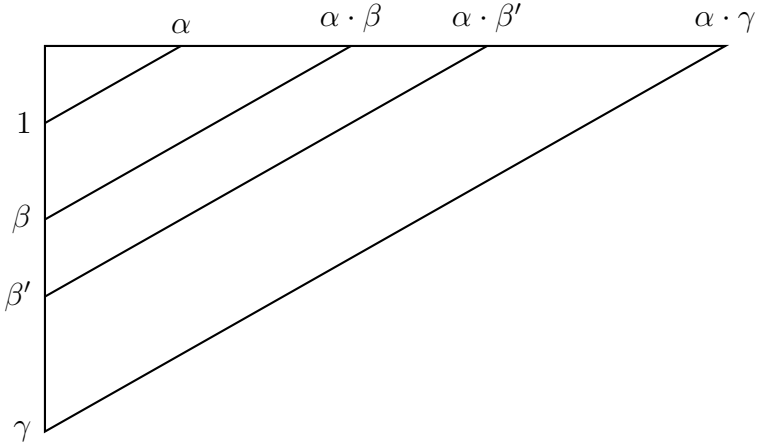
Alıştırma XXXI. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 43. $\alpha \geq 1$ ise $\xi \mapsto \alpha \cdot \xi$ işlemi normaldir.

Alıştırma XXXII. Teoremi kanıtlayın.

Örneğin Şekil 7'ye bakın. Şekilde

$$\omega^2 = \omega \cdot \omega, \quad \omega^3 = \omega^2 \cdot \omega, \quad \omega^4 = \omega^3 \cdot \omega,$$



Şekil 6: Ordinal çarpma

ve genelde, Teorem 19’u kullanan resmi özyineli tanıma göre,

$$\alpha^0 = 1, \quad \alpha^1 = \alpha, \quad \alpha^{k+1} = \alpha^k \cdot \alpha.$$

Ayrıca

$$\omega^\omega = \sup_{i < \omega} (\omega^i).$$

Alıştırma XXXIII. $\xi \mapsto \xi^2$ göndermesi kesin artan mıdır? Sürekli midir?

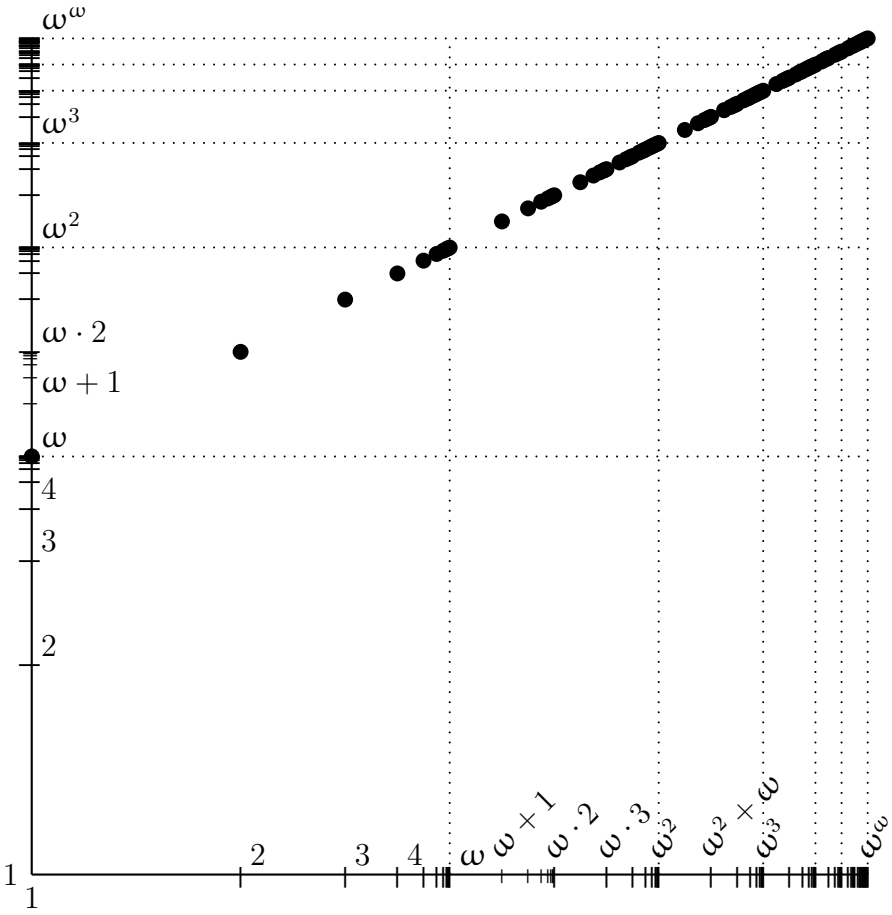
Teorem 44. *Ordinal çarpma, toplama üzerine soldan dağılır.*

Kanıt. Ordinal tümevarım ile

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \tag{7.1}$$

kanıtlayacağız.

$$1. \quad \alpha \cdot (\beta + 0) = \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + 0 = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0.$$



Şekil 7: $\eta = \omega \cdot \xi$ denkleminin grafiği

2. Eğer (7.1) doğru ise, o zaman

$$\begin{aligned}
 \alpha \cdot (\beta + \gamma') &= \alpha \cdot (\beta + \gamma)' \\
 &= \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha \\
 &= (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma) + \alpha \\
 &= \alpha \cdot \beta + (\alpha \cdot \gamma + \alpha) \\
 &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma'.
 \end{aligned}$$

3. Şimdi γ limit ve

$$\forall \xi (\xi < \gamma \Rightarrow \alpha \cdot (\beta + \xi) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \xi)$$

olsun. Eğer $\alpha = 0$ ise, iddia apaçıktır, dolayısıyla $\alpha > 0$ varsayacağız.

$$\begin{aligned}
 \alpha \cdot (\beta + \gamma) &= \alpha \cdot \sup_{\xi < \gamma} (\beta + \xi) && [\text{tanım}] \\
 &= \sup_{\xi < \gamma} (\alpha \cdot (\beta + \xi)) && [\eta \mapsto \alpha \cdot \eta \text{ normaldir}] \\
 &= \sup_{\xi < \gamma} (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \xi) && [\text{tümevarım hipotezi}] \\
 &= \alpha \cdot \beta + \sup_{\xi < \gamma} (\alpha \cdot \xi) && [\eta \mapsto \alpha \cdot \beta + \eta \text{ normaldir}] \\
 &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma. && [\text{tanım}] \quad \square
 \end{aligned}$$

Alıştırma XXXIV. Aşağıdaki kanıt nerede yanlıştır?

1. $0 \cdot (\beta + \gamma) = 0 = 0 + 0 = 0 \cdot \beta + 0 \cdot \gamma$.
2. Eğer (7.1) doğru ise, o zaman

$$\begin{aligned}
 \alpha' \cdot (\beta + \gamma) &= \alpha \cdot (\beta + \gamma) + (\beta + \gamma) \\
 &= (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma) + (\beta + \gamma) \\
 &= (\alpha \cdot \beta + \beta) + (\alpha \cdot \gamma + \gamma) \\
 &= \alpha' \cdot \beta + \alpha' \cdot \gamma.
 \end{aligned}$$

3. Eğer α limit ve $\forall \xi (\xi < \alpha \Rightarrow \xi \cdot (\beta + \gamma) = \xi \cdot \beta + \xi \cdot \gamma)$ ise

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (\beta + \gamma) &= \sup_{\xi < \alpha} (\xi \cdot (\beta + \gamma)) \\ &= \sup_{\xi < \alpha} (\xi \cdot \beta + \xi \cdot \gamma) \\ &= \sup_{\xi < \alpha} (\xi \cdot \beta) + \sup_{\xi < \alpha} (\xi \cdot \gamma) \\ &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.\end{aligned}$$

Alıştırma XXXV. Aşağıdaki kanıt nerede yanlışır?

1. $(\alpha + \beta) \cdot 0 = 0 = 0 + 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0.$
2. Eğer $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$ ise, o zaman

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \cdot \gamma' &= (\alpha + \beta) \cdot \gamma + (\alpha + \beta) \\ &= (\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma) + (\alpha + \beta) \\ &= (\alpha \cdot \gamma + \alpha) + (\beta \cdot \gamma + \beta) \\ &= \alpha \cdot \gamma' + \beta \cdot \gamma'.\end{aligned}$$

3. Eğer γ limit ve $\forall \xi (\xi < \gamma \Rightarrow (\alpha + \beta) \cdot \xi = \alpha \cdot \xi + \beta \cdot \xi)$ ise

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \cdot \gamma &= \sup_{\xi < \gamma} ((\alpha + \beta) \cdot \xi) \\ &= \sup_{\xi < \gamma} (\alpha \cdot \xi + \beta \cdot \xi) \\ &= \sup_{\xi < \gamma} (\alpha \cdot \xi) + \sup_{\xi < \gamma} (\beta \cdot \xi) \\ &= \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma.\end{aligned}$$

Teorem 45. *Ordinal çarpma birleşmelidir.*

Alıştırma XXXVI. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 46. $\alpha^{k+\ell} = \alpha^k \cdot \alpha^\ell.$

Alıştırma XXXVII. Teoremi kanıtlayın. (Tümevarım kullanın.)

Teorem 47. *Her $\xi \mapsto \xi \cdot \alpha$ işlemi artandır.*

Alıştırma XXXVIII. Teoremi kanıtlayın.

7.2 Hesaplamalar

Lemma 6. $0 < \ell$ ise $1 + \omega^\ell = \omega^\ell$.

Alıştırma XXXIX. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 48. $k < m$ ise $\omega^k + \omega^m = \omega^m$.

Kanıt. Bir ℓ için, $k + \ell = m$ ve $0 < \ell < \omega$, dolayısıyla

$$\begin{aligned}\omega^k + \omega^m &= \omega^k + \omega^{k+\ell} \\ &= \omega^k + \omega^k \cdot \omega^\ell \\ &= \omega^k \cdot (1 + \omega^\ell) \\ &= \omega^k \cdot \omega^\ell \\ &= \omega^{k+\ell} \\ &= \omega^m.\end{aligned}$$

□

Aşağıdaki teoremin özel bir durumu, Şekil 8’de gösteriliyor, ve kendisi Şekil 9’da.

Teorem 49. $0 < k$ ise $k \cdot \omega = \omega$.

Alıştırma XL. Teoremi kanıtlayın.

Lemma 7.

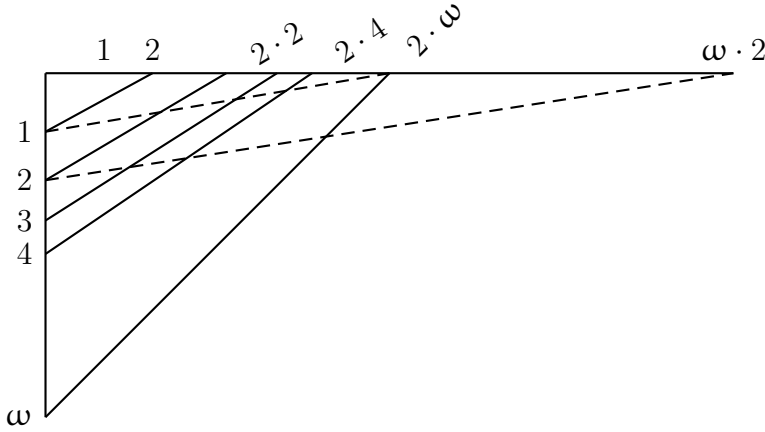
(a) Eğer $0 < \alpha < \omega^\omega$ ise, o zaman bir ve tek bir k için

$$\omega^k \leq \alpha < \omega^{k+1}.$$

(b) Bu durumda bir ve tek bir m için

$$\omega^k \cdot m \leq \alpha < \omega^k \cdot (m+1);$$

ayrıca $m > 0$.



Şekil 8: $2 \cdot \omega = \omega < \omega \cdot 2$

Alıştırma XLI. Lemmayı kanıtlayın. Teorem 41'in kanıtına bakın.

Teorem 50. *Eğer $0 < \alpha < \omega^\omega$ ise, o zaman bir ve tek bir şekilde*

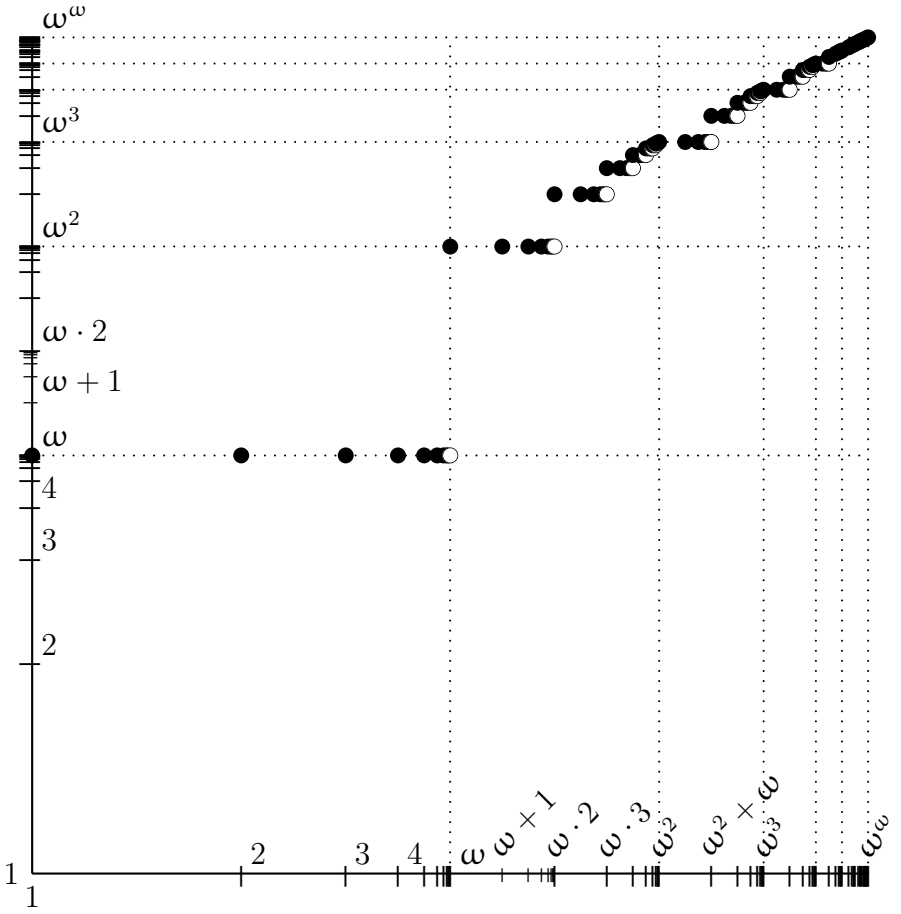
$$\begin{aligned} \alpha &= \omega^{k_0} \cdot m_0 + \cdots + \omega^{k_n} \cdot m_n, \\ k_0 &> \cdots > k_n, \\ \bigwedge_{i \leq n} m_i &> 0. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Alıştırma XLII. Teoremi kanıtlayın.

(7.2) eşitliğindeki toplam, α 'nın **Cantor normal biçimidir**. Ayrıca 0'in Cantor normal biçimi 0'dır.

Lemma 8. $\alpha < \omega^m$ ise $\alpha + \omega^m = \omega^m$.

Kanıt. α 'nın Cantor normal biçimini yazın ve Teorem 48'i kullanın. $\square$



Şekil 9: $\eta = \xi \cdot \omega$ denkleminin grafiği

Teorem 51. $\alpha < \omega^m$, $n > 0$, ve $k > 0$ ise

$$(\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot k = \omega^m \cdot n \cdot k + \alpha.$$

Alıştırma XLIII. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 52. $\alpha < \omega^m$, $n > 0$, ve $k > 0$ ise

$$(\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot \omega^k = \omega^{m+k}.$$

Alıştırma XLIV. Teoremi kanıtlayın.

Örneğin

$$\begin{aligned} (\omega^5 \cdot 10 + \omega^3 \cdot 8 + \omega) \cdot 6 &= \omega^5 \cdot 60 + \omega^3 \cdot 8 + \omega, \\ (\omega^5 \cdot 10 + \omega^3 \cdot 8 + \omega) \cdot \omega &= \omega^6, \\ (\omega^5 \cdot 10 + \omega^3 \cdot 8 + \omega) \cdot \omega^{10} &= \omega^{15}. \end{aligned}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned} &(\omega^3 \cdot 4 + \omega \cdot 6) \cdot (\omega^2 \cdot 3 + 8) \\ &= (\omega^3 \cdot 4 + \omega \cdot 6) \cdot \omega^2 \cdot 3 + (\omega^3 \cdot 4 + \omega \cdot 6) \cdot 8 \\ &= \omega^5 \cdot 3 + \omega^3 \cdot 32 + \omega \cdot 6. \end{aligned}$$

Alıştırma XLV. $(\omega^9 \cdot 9 + \omega^2 \cdot 9 + \omega \cdot 9 + 9) \cdot (\omega^2 \cdot 9 + \omega \cdot 9 + 9)$ çarpımının Cantor normal biçimini hesaplayın.

8 Ordinal kuvvet alma

8.1 Tanım ve özellikler

Özyineli tanıma göre her α için

$$\begin{aligned}\alpha^0 &= 1, \\ \alpha^{\beta'} &= \alpha^\beta \cdot \alpha, \\ \gamma \text{ limit ise } \alpha^\gamma &= \sup_{0 < \xi < \gamma} (\alpha^\xi).\end{aligned}$$

Teorem 53. $\alpha^1 = \alpha$, $1^\alpha = 1$, ve

$$0^\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = 0 \text{ durumunda,} \\ 0, & \alpha > 0 \text{ durumunda.} \end{cases}$$

Alıştırma XLVI. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 54. $\alpha \geq 2$ ise $\xi \mapsto \alpha^\xi$ işlemi, normaldir.

Alıştırma XLVII. Teoremi kanıtlayın.

Şekil 10'e bakın. Şekilde

$$\varepsilon_0 = \sup \{ \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots \}.$$

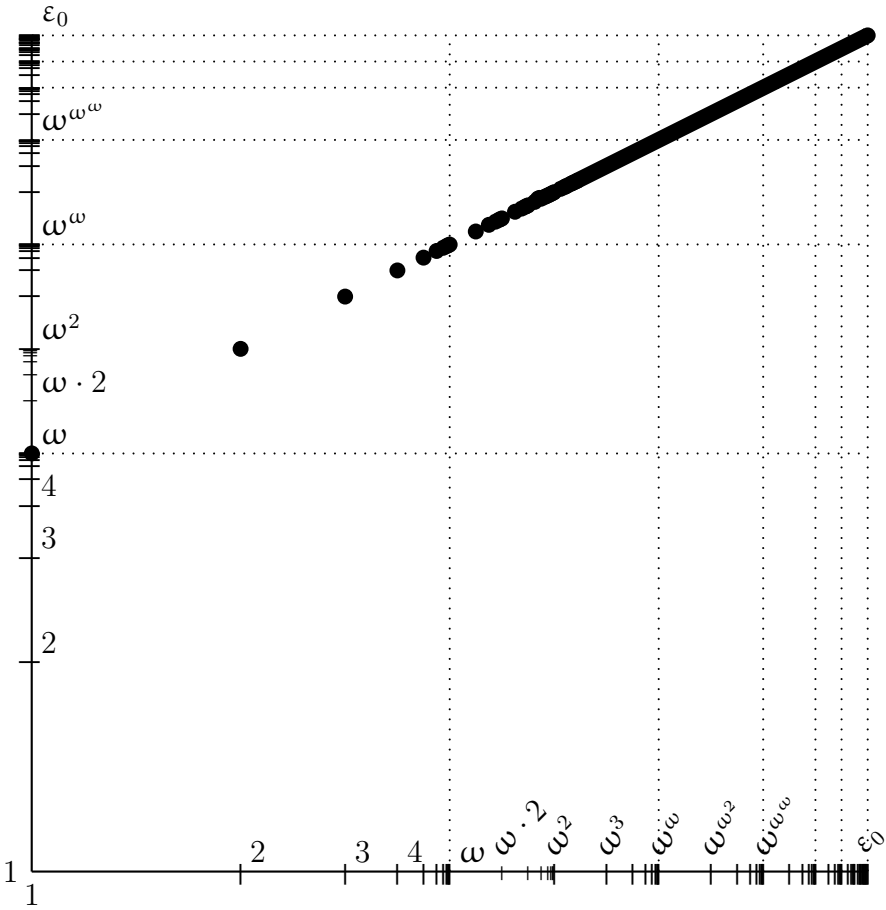
Alıştırma XLVIII. $\xi \mapsto \xi^\xi$ işlemi kesin artan mıdır? Sürekli midir?

Teorem 55. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$ ve $\alpha^{\beta \cdot \gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$.

Alıştırma XLIX. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 56. $\alpha \geq 1$ ise $\xi \mapsto \xi^\alpha$ artandır.

Alıştırma L. Teoremi kanıtlayın.



Şekil 10: $\eta = \omega^\xi$ denkleminin grafiği

8.2 Hesaplamalar

Lemma 9. Her α için $\alpha \leq \omega^\alpha < \omega^{\alpha+1}$.

Alıştırma LI. Lemmayı kanıtlayın. Tümevarım kullanılabilir.

Lemma 10.

1. Eğer $0 < \alpha$ ise, o zaman bir ve tek bir β için

$$\omega^\beta \leq \alpha < \omega^{\beta+1}.$$

2. Bu durumda bir ve tek bir m için

$$\omega^\beta \cdot m \leq \alpha < \omega^\beta \cdot (m+1);$$

ayrıca $m > 0$.

Alıştırma LII. Lemmayı kanıtlayın. Lemma 7'ye bakın.

Teorem 57. Eğer $0 < \alpha$ ise, o zaman bir ve tek bir şekilde

$$\alpha = \omega^{\beta_0} \cdot m_0 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot m_n, \quad (8.1)$$

$$\beta_0 > \dots > \beta_n,$$

$$\bigwedge_{i \leq n} m_i > 0.$$

Alıştırma LIII. Teoremi kanıtlayın.

(8.1) eşitliğindeki toplam, α 'nın **Cantor normal biçimidir**.

Lemma 11. $\alpha < \omega^\beta$ ise $\alpha + \omega^\beta = \omega^\beta$.

Alıştırma LIV. Lemmayı kanıtlayın. (Lemma 8'e bakın.)

Teorem 58. $\alpha < \omega^\beta$, $n > 0$, ve $k > 0$ ise

$$(\omega^\beta \cdot n + \alpha) \cdot k = \omega^\beta \cdot n \cdot k + \alpha.$$

Alıştırma LV. Sonucu kanıtlayın.

Teorem 59. $\alpha < \omega^\beta$, $n > 0$, ve $1 \leq \gamma$ ise

$$(\omega^\beta \cdot n + \alpha) \cdot \omega^\gamma = \omega^{\beta+\gamma}.$$

Alıştırma LVI. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi iki Cantor normal biçiminin çarpımının Cantor normal biçimini hesaplayabiliriz.

Teorem 60. $0 < k$ ve $\omega \leq \alpha$ ise

$$k^{\omega^{n+1}} = \omega^{\omega^n}, \quad k^{\omega^\alpha} = \omega^{\omega^\alpha}.$$

Alıştırma LVII. Teoremi kanıtlayın.

Lemma 12. Ardıl olmayan her α için, bir β için,

$$\alpha = \omega \cdot \beta.$$

Alıştırma LVIII. Lemmayı kanıtlayın.

Teorem 61. $\alpha < \omega^\beta$, $n > 0$, ve γ limit ise

$$(\omega^\beta \cdot n + \alpha)^\gamma = \omega^{\beta \cdot \gamma}.$$

Alıştırma LIX. Teoremi kanıtlayın.

9 Kardinaller

9.1 Eşlemeler

Eğer $f: A \rightarrow B$ ise, üç özel durum vardır.

1. Eğer $\forall x_0 \forall x_1 (f(x_0) = f(x_1) \Rightarrow x_0 = x_1)$ ise, o zaman f **birebirdir**, bir **gömmedir**, ve A 'yı B 'ye **gömür**. Bu durumda

$$\boxed{A \preccurlyeq B}$$

yazılır.

2. Eğer $f[A] = B$ ise, o zaman f , B 'yi **örter**.
3. Eğer f hem birebirdir hem de B 'yi örter ise, o zaman A ve B arasında f bir **eşlemedir**. Bu durumda A ve B **eşleniktir** ve

$$\boxed{A \approx B}$$

yazılır.

Teorem 62 (Schröder–Bernstein). $A \preccurlyeq B$ ve $B \preccurlyeq A$ ise

$$A \approx B.$$

Kanıt. $f: A \xrightarrow{\sim} B$ ve $g: B \xrightarrow{\sim} A$ olsun. Özyinelemeyle

$$\begin{aligned} A_0 &= A, & A_{n+1} &= g[B_n], \\ B_0 &= B, & B_{n+1} &= f[A_n] \end{aligned}$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned} f[A_0 \setminus A_1] &= B_1 \setminus B_2, \\ g[B_0 \setminus B_1] &= A_1 \setminus A_2, \end{aligned}$$

dolayısıyla $A_0 \setminus A_2 \approx B_0 \setminus B_2$. Benzer şekilde

$$A_n \setminus A_{n+2} \approx B_n \setminus B_{n+2},$$

dolayısıyla

$$A \setminus \bigcap_{i < \omega} A_i \approx B \setminus \bigcap_{i < \omega} B_i.$$

Ayrıca

$$f \left[\bigcap_{i < \omega} A_i \right] = \bigcap_{i < \omega} f[A_i] = \bigcap_{0 < i < \omega} B_i = \bigcap_{i < \omega} B_i,$$

dolayısıyla $\bigcap_{i < \omega} A_i \approx \bigcap_{i < \omega} B_i$, ve sonuç olarak $A \approx B$. $\square$

9.2 Kardinaller

Eğer bir A kümesi bir ordinal ile eşlenik ise, o zaman tanıma göre

$$\text{kard}(A) = \min\{\xi : \xi \approx A\}.$$

Bu ordinal, A 'nın **kardinalidir**. Şimdi

$$\mathbf{KN} = \text{kard}[\mathbf{ON}] = \{\xi : \forall \eta (\xi \approx \eta \Rightarrow \xi \leq \eta)\}$$

olsun.

Teorem 63. $\xi \mapsto \text{kard}(\xi)$ artandır.

Kanıt. Eğer $\alpha \leq \beta$ ama $\text{kard}(\beta) \leq \text{kard}(\alpha)$ ise, o zaman

$$\alpha \preceq \beta \approx \text{kard}(\beta) \preceq \text{kard}(\alpha) \approx \alpha,$$

dolayısıyla $\alpha \approx \beta$ ve $\text{kard}(\alpha) \leq \text{kard}(\beta)$. □

Teorem 64. $k < \omega$ ise $\text{kard}(k) = k$.

Alıştırma LX. Teoremi kanıtlayın.

κ ve λ , her zaman kardinal olsun.

9.3 Kardinal Toplama ve Çarpma

Tanıma göre

$$\kappa \oplus \lambda = \text{kard}(\kappa + \lambda), \quad \kappa \otimes \lambda = \text{kard}(\kappa \cdot \lambda).$$

Ordinal toplama ve çarpma birleşmeli olduğundan kardinal işlemler de birleşmelidir.

Tanıma göre

$$\begin{aligned} A \times B &= \{z : \exists x \exists y (z = (x, y) \wedge x \in A \wedge y \in B)\} \\ &= \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}. \end{aligned}$$

Bu küme, A ve B 'nin **Kartezyan çarpımıdır**. Şimdi

$$A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$$

olsun; bu bileşim, A ve B 'nin **ayrık bileşimidir**. Özel olarak $A \sqcup A = A \times 2$.

Lemma 13. Her α ve her β için

$$\alpha \sqcup \beta \approx \alpha + \beta, \quad \alpha \times \beta \approx \alpha \cdot \beta.$$

Kanıt. Eğer

$$f(\xi, i) = \alpha \cdot i + \xi, \quad g(\xi, \eta) = \alpha \cdot \eta + \xi$$

ise, o zaman

$$f: \alpha \sqcup \beta \xrightarrow{\sim} \alpha + \beta, \quad f: \alpha \times \beta \xrightarrow{\sim} \alpha \cdot \beta. \quad \square$$

Teorem 65. Her α ve her β için

$$\alpha + \beta \approx \beta + \alpha, \quad \alpha \cdot \beta \approx \beta \cdot \alpha.$$

Alıştırma LXI. Teoremi kanıtlayın.

Sonuç. KN'de $\oplus$ ve $\otimes$ değişmelidir.

Lemma 14. $t_i = i \cdot (i + 1)/2$ olmak üzere

$$(i, j) \mapsto t_{i+j} + i: \omega \times \omega \xrightarrow{\sim} \omega.$$

Lemma 15. Her sonsuz κ için, bir α için,

$$\kappa = \omega^\alpha.$$

Kanıt. Teorem 57'ye göre bir β , bir γ , ve $\mathbb{N}$ 'de bir n için

$$\gamma < \omega^\beta, \quad \kappa = \omega^\beta \cdot n + \gamma.$$

O zaman Lemma 13'e göre $\kappa \approx \gamma + n \cdot \omega^\beta$, dolayısıyla Teorem 59'a göre

$$\kappa \approx \omega^\beta.$$

Eğer $\alpha = \min\{\xi: \omega^\xi \approx \kappa\}$ ise, o zaman $\kappa = \omega^\alpha$. $\square$

Lemma 16. Eğer $\alpha > 0$ ise, o zaman $\omega^\alpha \times \omega^\alpha \approx \omega^\alpha$.

Kanıt. Lemma 14'teki gibi $f(i, j) = t_{i+j} + i$ olsun. O zaman $f(0, 0) = 0$. Bir n için, eğer

$$\begin{aligned}\alpha_0 &> \cdots > \alpha_{n-1}, \\ \{b_0, \dots, b_{n-1}\} &\subset \omega, \\ \{c_0, \dots, c_{n-1}\} &\subset \omega, \\ 0 < \text{maks}(b_0, c_0) &< \omega \wedge \cdots \wedge 0 < \text{maks}(b_{n-1}, c_{n-1}) < \omega, \\ \beta &= \omega^{\alpha_0} \cdot b_1 + \cdots + \omega^{\alpha_{n-1}} \cdot b_{n-1}, \\ \gamma &= \omega^{\alpha_0} \cdot c_1 + \cdots + \omega^{\alpha_{n-1}} \cdot c_{n-1}\end{aligned}$$

ise

$$\mathbf{F}(\beta, \gamma) = \omega^{\alpha_0} \cdot f(b_0, c_0) + \cdots + \omega^{\alpha_{n-1}} \cdot f(b_{n-1}, c_{n-1})$$

olsun. O zaman $\mathbf{F}$ birebirdir ve $\mathbf{F}[\omega^\alpha \times \omega^\alpha] = \omega^\alpha$. $\square$

Teorem 66. *Eğer $2 \leq \min(\kappa, \lambda)$ ve $\omega \leq \text{maks}(\kappa, \lambda)$ ise, o zaman*

$$\kappa \oplus \lambda = \kappa \otimes \lambda = \text{maks}(\kappa, \lambda).$$

Kanıt. $\kappa \geq \lambda$ ise

$$\kappa \leq \kappa \oplus \lambda \leq \kappa \oplus \kappa \leq \kappa \otimes 2 \leq \kappa \otimes \lambda \leq \kappa \otimes \kappa. \quad \square$$

Tanım kümesi A olan, değer kümesi B 'nin bir altkümesi olan göndermeler

$$\boxed{{}^A B}$$

kümesini oluştursun.

Teorem 67. ${}^A 2 \approx \mathcal{P}(A)$.

Alıştırma LXII. Teoremi kanıtlayın.

Eğer $f \in {}^A B$ ve $C \subseteq A$ ise

$$f \upharpoonright C = \{(x, f(x)) : x \in C\}$$

olsun. O zaman $f \upharpoonright C \in {}^C B$.

Lemma 17. $0 < n < \omega \leq \alpha$ ise ${}^n \alpha \approx \alpha$.

Kanıt. Teorem 66'ya göre bir f için

$$f : \alpha \times \alpha \xrightarrow{\sim} \alpha.$$

Eğer $g_n : {}^n \alpha \xrightarrow{\sim} \alpha$ ise, o zaman

$$x \mapsto f(g_n(x \upharpoonright n), x(n)) : {}^{n+1} \alpha \xrightarrow{\sim} \alpha. \quad \square$$

Lemma 18. $\omega \leq \alpha$ ise $\bigcup_{i \in \omega} {}^i \alpha \approx \alpha$.

Kanıt. Lemma 17'nin *kanıtından* bir $i \mapsto g_i$ için ω 'da her n için

$$g_n : {}^n \alpha \xrightarrow{\sim} \alpha.$$

Bir f için eğer $a : n \rightarrow \alpha$ ise, o zaman $f(a) = (n, g_n(a))$. Bu şekilde

$$f : \bigcup_{i \in \omega} {}^i \alpha \xrightarrow{\sim} \omega \times \alpha. \quad \square$$

Şimdi herhangi A kümesi için $n \in \omega$ olmak üzere

$$\mathcal{P}_n(A) = \{X \in \mathcal{P}(A) : \text{kard}(X) = n\}$$

olsun, ve ondan sonra

$$\mathcal{P}_\omega(A) = \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{P}_i(A)$$

olsun.

Lemma 19. $\omega \leq \kappa$ ise $\mathcal{P}_\omega(\kappa) \approx \kappa$.

Kanıt. İlk olarak

$$\xi \mapsto \{\xi\}: \kappa \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_1(\kappa).$$

Bu eşlemenin tersi f_1 olsun. Ayrıca $g: \kappa \times \kappa \xrightarrow{\sim} \kappa$ olsun. Eğer

$$f_m: \mathcal{P}_m(\kappa) \xrightarrow{\sim} \kappa$$

ise, o zaman

$$(X, \xi) \mapsto g(f_m(X), \xi): \mathcal{P}_m(\kappa) \times \kappa \xrightarrow{\sim} \kappa.$$

Ayrıca

$$(X, \xi) \mapsto X \cup \{\text{maks}(X) + \xi\}: \mathcal{P}_m(\kappa) \times \kappa \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_{m+1}(\kappa),$$

dolayısıyla öyle bir f_{m+1} elde edilebilir ki

$$f_{m+1}: \mathcal{P}_{m+1}(\kappa) \xrightarrow{\sim} \kappa.$$

Lemma 18'in kanıtındaki gibi $\mathcal{P}_\omega(\kappa) \preceq \kappa$. □

Teorem 68. α ve β sonsuz ise

$$\text{kard}(\beta^\alpha) = \text{maks}(\text{kard}(\alpha), \text{kard}(\beta)).$$

Kanıt. Eğer $\gamma < \omega^\alpha$ ve Cantor normal biçiminde

$$\gamma = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \dots + \omega^{\alpha_{n-1}} \cdot a_{n-1}$$

ise,

$$f(\gamma) = (i \mapsto a_i, \{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\})$$

olsun. Bu şekilde

$$f: \omega^\alpha \xrightarrow{\sim} \bigcup_{i \in \omega} {}^i \omega \times \mathcal{P}_\omega(\alpha),$$

dolayısıyla Lemmalar 18 ve 19'dan

$$\text{kard}(\omega^\alpha) = \text{kard}(\omega) \otimes \text{kard}(\alpha).$$

Teorem 57'de, dolayısıyla yukarıda da, ω 'nın yerine β konulabilir. □

9.4 Sayılamaz kümeler

Eğer $A \preceq \omega$ ise, o zaman A **sayılabilir**; diğer durumda A **sayılamaz**. Gördüğümüz gibi sayılabilir kümelerden ordinal toplama, çarpma, ve kuvvet alma ile sayılamaz kümeler elde edilemez.

$\mathcal{P}(\mathbf{V}) = \mathbf{V}$ ama $n \in \omega$ ise

$$n < 2^n = \text{kard}(\mathcal{P}(n)).$$

Teorem 69 (Cantor). *Her A kümesi için*

$$A \preceq \mathcal{P}(A) \wedge A \not\approx \mathcal{P}(A).$$

Kanıt. $x \mapsto \{x\}: A \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(A)$. Şimdi $f: A \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(A)$ ise

$$B = \{x \in A: x \notin f(x)\}$$

olsun. O zaman A 'nın her c elemanı için

$$c \in B \Leftrightarrow c \notin f(c),$$

dolayısıyla $B \neq f(c)$. Bu şekilde f , eşleme olamaz. $\square$

Alıştırma LXIII. Cantor Teoreminin kanıtı A 'nın küme olduğunu nasıl kullanır?

AKSİYOM 8 (Kuvvet Kümesi). *Her A kümesi için $\mathcal{P}(A)$ sı-
nıfı bir kümedir.*

Şu anda A 'nın sonsuz olduğu $\mathcal{P}(A)$ kümesinin kardinali var olup olmadığını bilmiyoruz.

Teorem 70. $A \times B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$, *dolayısıyla kümedir.*

Alıştırma LXIV. Teoremi kanıtlayın.

Tanıma göre

$$\kappa^+ = \{\xi: \xi \preccurlyeq \kappa\}$$

olsun.

Teorem 71 (Hartogs). $\kappa^+ \in \mathbf{KN}$, $\kappa^+ > \kappa$, ve

$$\kappa^+ = \min\{\xi \in \mathbf{KN}: \kappa < \xi\}. \quad (9.1)$$

Kanıt. Eğer $f: \alpha \xrightarrow{\sim} \kappa$ ise, o zaman

$$\{(f(\xi), f(\eta)): \xi \leq \eta < \alpha\} \in \mathcal{P}(\kappa \times \kappa),$$

ve ayrıca elemandan α elde edilebilir. Bu şekilde κ^+ , $\mathcal{P}(\kappa \times \kappa)$ 'nın bir altkümesinin bir imgesidir, dolayısıyla κ^+ da bir kümedir.

Şimdi $\kappa^+ \subseteq \mathbf{ON}$ ve κ^+ geçişli olduğundan bir ordinaldir. Bu durumda $\kappa^+ \notin \kappa^+$ olduğundan $\kappa^+ > \kappa$, ve tanımlardan (9.1) çıkar. $\square$

κ^+ , κ 'nın **kardinal ardılıdır**. Özyineli tanıma göre

$$\begin{aligned} \aleph_0 &= \omega, \\ \aleph_{\alpha'} &= (\aleph_\alpha)^+, \\ \alpha \text{ limit ise } \aleph_\alpha &= \sup_{\xi < \alpha} \aleph_\xi. \end{aligned}$$

(Burada $\aleph$, İbrani *alef* harfidir.)

Teorem 72. $\xi \mapsto \aleph_\xi$ normaldir ve imgesi $\mathbf{KN} \setminus \omega$.

Alıştırma LXV. Teoremi kanıtlayın.

9.5 Seçme

Gördüğümüz aksiyomlar, **Zermelo–Fraenkel** veya **ZF** aksiyomlarıdır. Şimdi bir aksiyom daha kullanacağız.

AKSİYOM 9 (Seçim). *Her küme iyisırılanabilir.*

Gödel'in kanıtladığı bir teoreme göre, ZF aksiyomlarının bir *modelinde*, Seçim Aksiyomu (*Axiom of Choice*) doğrudur. Cohen'in kanıtladığı bir teoreme göre, ZF aksiyomlarının bir modelinde, Seçim Aksiyomu yanlıştır. Kısaca Seçim Aksiyomu, ZF'den bağımsızdır.

Seçim Aksiyomu ile ZF, **ZFC** olur. Şimdi her kümenin kardinali vardır. Örneğin tanıma göre

$$\lambda^\kappa = \text{kard}({}^\kappa\lambda).$$

Bu kuvvet, ordinal kuvvet değil, **kardinal kuvvettir**. Örneğin $\aleph_0 = \omega$ olduğu halde Teoremler 60, 67, ve 69'a göre

$$\text{kard}(2^\omega) = \aleph_0, \quad 2^{\aleph_0} > \aleph_0.$$

Aşağıdaki kurallar kolaydır.

$$\begin{aligned} 0 < \lambda &\Rightarrow 0^\lambda = 0, & \kappa^{\lambda \oplus \mu} &= \kappa^\lambda \otimes \kappa^\mu, \\ \kappa^0 &= 1, & \kappa^{\lambda \otimes \mu} &= (\kappa^\lambda)^\mu, \\ 1^\lambda &= 1, & \kappa \leq \mu \wedge \lambda \leq \nu &\Rightarrow \kappa^\lambda \leq \mu^\nu. \\ \kappa^1 &= \kappa, \end{aligned}$$

Teorem 73. $2 \leq \kappa$, $1 \leq \lambda$, ve $\aleph_0 \leq \max\{\kappa, \lambda\}$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \kappa \leq 2^\lambda &\Rightarrow \kappa^\lambda = 2^\lambda, \\ 2^\lambda < \kappa &\Rightarrow \kappa^\lambda \leq 2^\kappa. \end{aligned}$$

Kanıt. Hipoteze göre $\kappa \leq 2^\lambda$ ise $2 \leq \kappa \leq 2^\lambda$ ve λ sonsuzdur, dolayısıyla

$$2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda \otimes \lambda} = 2^\lambda.$$

Ayrıca $2^\lambda < \kappa$ ise $\lambda \leq \kappa$, dolayısıyla κ sonsuzdur ve

$$\kappa^\lambda \leq (2^\kappa)^\lambda = 2^{\kappa \otimes \lambda} = 2^\kappa. \quad \square$$

Örneğin

$$2 \leq \kappa \leq 2^{\aleph_0} < \mu \Rightarrow \kappa^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \leq \mu^{\aleph_0} \leq 2^\mu.$$

Şimdi aşağıdaki tanım yaparız.

$$\begin{aligned} \beth_0 &= \aleph_0, \\ \beth_{\alpha'} &= \text{kard}(\mathcal{P}(\beth_\alpha)) = 2^{\beth_\alpha}, \\ \alpha \text{ limit ise } \beth_\alpha &= \sup_{\xi < \alpha} \beth_\xi. \end{aligned}$$

(Burada $\beth$, İbrani *beth* harfidir.) O zaman $\xi \mapsto \beth_\xi$ normaldir, ve

$$\aleph_\alpha \leq \beth_\alpha.$$

Teorem 74. *Tüm κ ve λ için*

$$\begin{aligned} 2 \leq \kappa \leq \beth_{\alpha+1} &\Rightarrow \kappa^{\beth_\alpha} = \beth_{\alpha+1}, \\ 1 \leq \lambda \leq \beth_\alpha &\Rightarrow \beth_{\alpha+1}^\lambda = \beth_{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Alıştırma LXVI. Teoremi kanıtlayın.

Kontinuum Hipotezi veya **KH**, $\aleph_1 = \beth_1$ önermesidir. **Genelleştirilmiş Kontinuum Hipotezi** veya **GKH**, $\forall \xi \aleph_\xi = \beth_\xi$ önermesidir. Gödel'in kanıtladığı teoreme göre, ZFC aksiyomlarının bir modelinde, GKH doğrudur. Cohen'in kanıtladığı teoreme göre, ZFC aksiyomlarının bir modelinde, KH yanlıştır. Bu şekilde KH, ZFC'den bağımsızdır.

10 Kofinallik

10.1 Tanım ve özellikler

Sonsuz bir κ kardinali limit ordinali olduğundan

$$\kappa = \sup_{\xi < \kappa} \xi = \bigcup_{\xi < \kappa} \xi.$$

Bazen bir kardinal, kendisinden küçük bir altkümenin supremumudur. Örneğin $\omega < \aleph_\omega$, ama

$$\aleph_\omega = \sup_{i \in \omega} \aleph_i.$$

Genelde α limit, $b \subseteq \alpha$, ve

$$\forall \xi (\xi < \alpha \Rightarrow \exists \eta (\eta \in b \wedge \xi < \eta))$$

ise, b altkümesi, α ordinalinin **sınırsız** (*unbounded*) altkümesidir. Bu durumda

$$\alpha = \sup(b).$$

Örneğin her limit ordinali, kendisinde sınırsızdır. Ayrıca $\{\aleph_i : i \in \omega\}$, $\aleph_\omega$ ordinalinde sınırsızdır. Bir limit ordinalin sınırsız altkümelerinin en küçük kardinaline, ordinalin **kofinalliği** (*cofinality*) denir, ve bu kardinal, $\text{kf}(\alpha)$ olarak yazılabilir. Yani

$$\text{kf}(\alpha) = \min\{\text{kard}(x) : x \subseteq \alpha \wedge \sup(x) = \alpha\}.$$

Ayrıca, tanıma göre,

$$\text{kf}(0) = 0, \quad \text{kf}(\alpha + 1) = 1$$

denebilir, ama bu durumları kullanmayacağız.

Teorem 75. *Her α limit ordinali için, tanım kümesi $\text{kf}(\alpha)$ olan, değer kümesi α ordinalinin sınırsız bir altkümesi olan, kesin artan bir gönderme vardır.*

Kanıt. $f: \text{kf}(\alpha) \rightarrow \alpha$ olsun, ve $f[\alpha]$, α ordinalinin sınırsız bir altkümesi olsun. Özyinelemeyle, tanım kümesi $\text{kf}(\alpha)$ olan,

$$g(\beta) = \text{maks}\left(f(\beta), \sup(g[\beta])\right)$$

koşulunu sağlayan bir g göndermesi vardır. Eğer $\beta < \text{kf}(\alpha)$ ve $g[\beta] \subseteq \alpha$ ise, o zaman $g[\beta]$, α ordinalinin sınırsız altkümesi değil, dolayısıyla $g(\beta) \in \alpha$; ayrıca $f(\beta) \leq g(\beta)$. Öyleyse g , istediğimiz gibidir. $\square$

Teorem 76. α ve β limit ordinalleri olsun. Eğer $f: \alpha \rightarrow \beta$ ve kesin artan ise, ve $\beta = \bigcup f[\alpha]$ ise, o zaman

$$\text{kf}(\alpha) = \text{kf}(\beta).$$

Kanıt. $\text{kf}(\beta) \leq \text{kf}(\alpha)$ ve $\text{kf}(\alpha) \leq \text{kf}(\beta)$ eşitsizliklerini kanıtlayacağız.

1. $g: \text{kf}(\alpha) \rightarrow \alpha$ ve $\bigcup g[\text{kf}(\alpha)] = \alpha$ olsun. $\delta < \beta$ ise, hipoteze göre α ordinalinin bir θ elemanı için

$$\delta < f(\theta).$$

O zaman $\text{kf}(\alpha)$ kardinalinin bir ι elemanı için

$$\theta < g(\iota), \quad \delta < f(\theta) < f(g(\iota)).$$

Öyleyse $\bigcup (f \circ g)[\text{kf}(\alpha)] = \beta$, dolayısıyla $\text{kf}(\beta) \leq \text{kf}(\alpha)$.

2. $h: \text{kf}(\beta) \rightarrow \beta$ ve $\bigcup h[\text{kf}(\beta)] = \beta$ olsun. $\delta < \text{kf}(\beta)$ ise

$$k(\delta) = \min\{\xi \in \alpha: h(\delta) < f(\xi)\}$$

olsun. O zaman $k: \text{kf}(\beta) \rightarrow \alpha$. Eğer $\theta \in \alpha$ ise, o zaman $\text{kf}(\beta)$ kardinalinin

$$f(\theta) < h(\delta)$$

koşulunu sağlayan bir δ elemanı vardır. O zaman

$$f(\theta) < h(\delta) < f(k(\delta)),$$

dolayısıyla $\theta < k(\delta)$, çünkü f kesin artandır. Öyleyse $\bigcup k[\text{kf}(\beta)] = \alpha$, dolayısıyla $\text{kf}(\alpha) \leq \text{kf}(\beta)$ ve aslında $\text{kf}(\alpha) = \text{kf}(\beta)$. $\square$

Özel durum olarak $\mathbf{F}$ normal ve α limit ise

$$\text{kf}(\mathbf{F}(\alpha)) = \text{kf}(\alpha).$$

Teorem 77. α limit ise $\text{kf}(\aleph_\alpha) = \text{kf}(\alpha)$.

Kanıt. $\xi \mapsto \aleph_\xi$ normaldir. $\square$

Teorem 78. Cantor normal biçiminde

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \cdots + \omega^{\alpha_n} \cdot a_n$$

ve $\alpha_n > 0$ ise, o zaman

$$\text{kf}(\alpha) = \begin{cases} \omega, & \text{eğer } \alpha_n \text{ bir ardılsa,} \\ \text{kf}(\alpha_n), & \text{eğer } \alpha_n \text{ bir limitse.} \end{cases}$$

Kanıt. Son teoreme göre α limit, $\gamma \geq 1$, ve $\delta \geq 2$ ise

$$\text{kf}(\alpha) = \text{kf}(\beta + \alpha) = \text{kf}(\gamma \cdot \alpha) = \text{kf}(\delta^\alpha). \quad \square$$

Bazen bu hesaplama bize yardım etmez. Mesela $f(0) = 0$ ve $f(n+1) = \omega^{f(n)}$ ve $\alpha = \sup(f[\omega])$ ise, yani

$$\alpha = \sup\{0, 1, \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}$$

ise, o zaman $\text{kf}(\alpha) = \omega$, ama $\alpha = \omega^\alpha$.

Teorem 79. Her α ordinali için

$$\text{kf}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}.$$

Kanıt. $\beta < \aleph_{\alpha+1}$ ve $f: \beta \rightarrow \aleph_{\alpha+1}$ olsun. O zaman

$$\sup(f[\beta]) = \bigcup_{\xi < \beta} f(\xi).$$

Bu bileşimden $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ çarpımına giden bir h gömmesini tanımlayacağız. Seçim Aksiyomu sayesinde $\bigcup\{\aleph_\alpha: \xi < \aleph_{\alpha+1}\}$ kümesi iyisıralanabilir. Bu sıralamaya göre $\delta < \aleph_{\alpha+1}$ ise ${}^\delta\aleph_\alpha$ kümesinin en küçük gömmesi, g_δ olsun. O zaman $\gamma < \sup(f[\beta])$ ise

$$\delta = \min\{z \in \beta: \gamma < f(z)\}, \quad h(\gamma) = (g_\beta(\delta), g_\delta(\gamma))$$

olsun. Böylece

$$\text{kard}(\sup(f[\beta])) \leq \text{kard}(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha) = \aleph_\alpha,$$

dolayısıyla $\sup(f[\beta]) < \aleph_{\alpha+1}$. Sonuç olarak $\text{kf}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}$. $\square$

10.2 Hesaplamalar

Teorem 80. $2 \leq \kappa$, $1 \leq \lambda$, ve $\aleph_0 \leq \max\{\kappa, \lambda\}$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \lambda \geq \text{kf}(\kappa) &\Rightarrow \kappa < \kappa^\lambda, \\ \text{GKH} \wedge \lambda < \text{kf}(\kappa) &\Rightarrow \kappa = \kappa^\lambda. \end{aligned}$$

Kanıt. $\text{kf}(\kappa) \leq \lambda$ ise ${}^\lambda\kappa$ kümesinin

$$\kappa = \bigcup_{\xi < \lambda} f(\xi)$$

koşulunu sağlayan bir f elemanı vardır. Şimdi $\xi \mapsto g_\xi: \kappa \rightarrow {}^\lambda\kappa$ olsun. O zaman ${}^\lambda\kappa$ kümesinin $\{g_\xi: \xi < \kappa\}$ kümesinde olmayan bir

$$\eta \mapsto \min\left(\kappa \setminus \{g_\xi(\eta): \xi < f(\eta)\}\right)$$

elemanı vardır.

Şimdi $\lambda < \text{kf}(\kappa)$ olsun. O zaman Teorem 79'un kanıtındaki gibi

$$\begin{aligned} {}^\lambda\kappa &= \bigcup_{\xi < \kappa} {}^\lambda\xi = \bigcup_{\lambda \leq \xi < \kappa} {}^\lambda\xi \\ &\preceq \bigcup_{\lambda \leq \xi < \kappa} {}^\lambda(\text{kard}(\xi)) = \bigcup_{\substack{\lambda \leq \xi < \kappa \\ \xi \in \mathbf{KN}}} {}^\lambda\xi \preceq \bigcup_{\substack{\lambda \leq \xi < \kappa \\ \xi \in \mathbf{KN}}} \xi 2. \end{aligned}$$

Eğer GKH doğruysa $\mu < \kappa \Rightarrow 2^\mu \leq \kappa$, dolayısıyla $\kappa^\lambda \leq \kappa$. $\square$

Şimdi, gösterdiklerimize göre, eğer $\kappa + \lambda$ sonsuzsa, o zaman

$$\begin{aligned} 2 \leq \kappa \leq 2^\lambda &\Rightarrow \kappa^\lambda = 2^\lambda, \\ \text{kf}(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa &\Rightarrow \kappa < \kappa^\lambda \leq 2^\kappa, \\ 1 \leq \lambda < \text{kf}(\kappa) &\Rightarrow \kappa \leq \kappa^\lambda \leq 2^\kappa. \end{aligned}$$

Ayrıca

$$\text{GKH} \Rightarrow \kappa^\lambda = \begin{cases} \lambda^+, & \text{eğer } 2 \leq \kappa < \lambda \text{ ise,} \\ \kappa^+, & \text{eğer } \text{kf}(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa \text{ ise,} \\ \kappa, & \text{eğer } 1 \leq \lambda < \text{kf}(\kappa) \text{ ise.} \end{cases}$$

Özel olarak

$$\text{GKH} \Rightarrow \aleph_{\alpha}^{\aleph_{\beta}} = \begin{cases} \aleph_{\beta+1}, & \text{eğer } \alpha < \beta \text{ ise,} \\ \aleph_{\alpha+1}, & \text{eğer } \text{kf}(\alpha) \leq \aleph_{\beta} \leq \aleph_{\alpha} \text{ ise,} \\ \aleph_{\alpha}, & \text{eğer } \aleph_{\beta} < \text{kf}(\alpha) \text{ ise.} \end{cases}$$