

Aksiyomatik Kümeler Kuramı

David Pierce

Matematik Bölümü

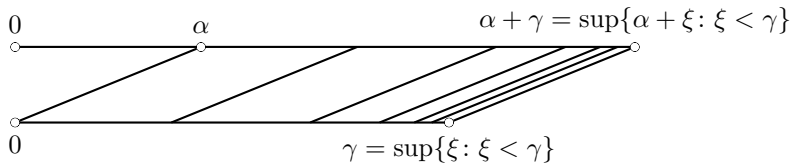
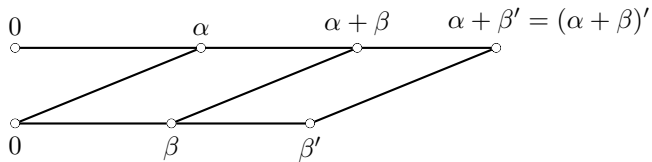
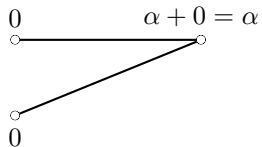
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi

`mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/`

`polytropy.com/kumeler-kurami/`

2021.12.11 dersi

Ordinal toplamanın özyineli tanımı:



Göstermiştik, her α , β , ve γ ordinali için:

- $\alpha + 1 = \alpha'$;
- $0 + \alpha = \alpha$;
- $\xi \mapsto \alpha + \xi$ **normaldir**, yani
 - kesin artandır,
 - *sürekli*dir;
- $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
- $1 + \omega = \omega < \omega + 1$;
- $\alpha \leq \beta$ ise

$$\alpha + \xi = \beta$$

denkleminin bir ve tek bir çözümü vardır.

Analizde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olduğunda aşağıdaki koşullar denktir.

- f , a 'da **süreklidir**.

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

- $\forall \varepsilon \left(\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta \left(\delta > 0 \wedge \forall x \right.$

$$\left. \left(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \right) \right).$$

- $\forall \varepsilon \left(\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta \left(\delta > 0 \wedge \forall x \right.$

$$\left. \left(a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon \right) \right).$$

- $\forall y \forall z \left(y < f(a) < z \Rightarrow \exists t \exists u \left(t < a < u \wedge \forall x \right.$

$$\left. \left(t < x < u \Rightarrow y < f(x) < z \right) \right).$$

Son koşulu, **ON**'de kullanabiliriz.

$\mathbf{F}: \mathbf{ON} \rightarrow \mathbf{ON}$ ve $\alpha \in \mathbf{ON} \setminus \{0\}$ olduğunda aşağıdaki koşullar denktir.

- $\mathbf{F}$, α 'da süreklidir.

- $\forall \eta \forall \zeta \left(\eta < \mathbf{F}(\alpha) < \zeta \Rightarrow \exists \tau \exists v \left(\tau < \alpha < v \wedge \forall \xi \right.$

$$\left. \left(\tau < \xi < v \Rightarrow \eta < \mathbf{F}(\xi) < \zeta \right) \right).$$

Şimdi $\alpha = \beta'$ olsun. O zaman

$$\beta < \alpha < \alpha' \wedge \forall \xi (\beta < \xi < \alpha' \Rightarrow \xi = \alpha),$$

dolayısıyla her $\mathbf{F}$ için

$$\forall \eta \forall \zeta \left(\eta < \mathbf{F}(\alpha) < \zeta \Rightarrow (\beta < \alpha < \alpha' \wedge \forall \xi \right.$$

$$\left. (\beta < \xi < \alpha' \Rightarrow \eta < \mathbf{F}(\xi) < \zeta) \right)).$$

Böylece $\mathbf{ON}$ 'nin her tek-konumlu işlemi, her ardılda süreklidir.

$F: \mathbf{ON} \rightarrow \mathbf{ON}$ ve $\alpha \in \mathbf{ON}$ olduğunda aşağıdaki koşullar denktir.

- F , α 'da sağdan süreklidir.
- $\forall \eta \forall \zeta \left(\eta < \mathbf{F}(\alpha) < \zeta \Rightarrow \exists v \left(\alpha < v \wedge \forall \xi \right.$

$$\left. \left(\alpha \leq \xi < v \Rightarrow \eta < \mathbf{F}(\xi) < \zeta \right) \right).$$

Fakat $\alpha < \alpha' \wedge \forall \xi (\alpha \leq \xi < \alpha' \Rightarrow \xi = \alpha)$, dolayısıyla

$$\forall \eta \forall \zeta \left(\eta < \mathbf{F}(\alpha) < \zeta \Rightarrow \left(\alpha < \alpha' \wedge \forall \xi \right. \right. \\ \left. \left. \left(\alpha \leq \xi < \alpha' \Rightarrow \eta < \mathbf{F}(\xi) < \zeta \right) \right) \right).$$

Böylece $\mathbf{ON}$ 'nin her tek-konumlu işlemi, her yerde sağdan süreklidir.

Sonuç olarak $\mathbf{F}: \mathbf{ON} \rightarrow \mathbf{ON}$ olduğunda aşağıdaki koşullar denktir.

- $\mathbf{F}$ süreklidir.
- Her α limiti için $\mathbf{F}$, α 'da soldan süreklidir.
- Her α limiti için $\forall \eta \forall \zeta \left(\eta < \mathbf{F}(\alpha) < \zeta \Rightarrow \exists \tau \left(\tau < \alpha \wedge \forall \xi \right. \right.$
 $\left. \left. (\tau < \xi \leq \alpha \Rightarrow \eta < \mathbf{F}(\xi) < \zeta) \right) \right)$.

- Her α limiti için $\forall \eta \left(\eta < \mathbf{F}(\alpha) \Rightarrow \exists \tau \left(\tau < \alpha \wedge \forall \xi \right. \right.$
 $\left. \left. (\tau < \xi \leq \alpha \Rightarrow \eta < \mathbf{F}(\xi) \leq \mathbf{F}(\alpha)) \right) \right)$.

Şimdi $\mathbf{F}$ artan olduğunda $\mathbf{F}$ süreklidir ancak ve ancak her α limiti için

$$\sup\{\mathbf{F}(\xi): \xi < \alpha\} = \mathbf{F}(\alpha).$$

Kesin artan, sürekli bir fonksiyon **normaldir**.

Analizde eğer f sürekli ve $(a_n: n \in \omega)$ yakınsar ise, o zaman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right).$$

Benzer şekilde kümeler kuramında $\mathbf{F}$ normal ve $A \subseteq \mathbf{ON}$ ise,

$$\sup\{\mathbf{F}(\xi): \xi \in A\} = \mathbf{F}(\sup A).$$

Kanıtlarda bunu sık sık kullanırız. Örneğin tanıma göre

$$\alpha \cdot 0 = 0, \quad \alpha \cdot \beta' = \alpha \cdot \beta + \alpha, \quad \gamma \text{ limit ise } \alpha \cdot \gamma = \sup\{\alpha \cdot \xi: \xi < \gamma\}.$$

Alıştırmalara göre

- $\alpha > 0$ ise $\xi \mapsto \alpha \cdot \xi$ normaldir;
- $0 \cdot \beta = 0$, dolayısıyla $0 \cdot (\beta + \gamma) = 0 = 0 + 0 = 0 \cdot \beta + 0 \cdot \gamma$.

Şimdi $\alpha > 0$ olduğunda $\boxed{\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma}$ kanıtlayacağız.

1. $\alpha \cdot (\beta + 0) = \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + 0 = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0.$

2. $\boxed{\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma}$ iddiası $\gamma = \delta$ olduğu durumda doğru ise,

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (\beta + \delta') &= \alpha \cdot (\beta + \delta)' = \alpha \cdot (\beta + \delta) + \alpha && [\text{tanımlar}] \\
&= (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta) + \alpha && [\text{hipotez}] \\
&= \alpha \cdot \beta + (\alpha \cdot \delta + \alpha) && [\text{teorem}] \\
&= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta', && [\text{tanım}]
\end{aligned}$$

dolayısıyla $\gamma = \delta'$ olduğu durumda doğrudur.

3. δ limit ve iddia her $\gamma < \delta$ olduğu durumda doğru ise, o zaman $\beta + \delta$ da bir limittir, ve bundan dolayı

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (\beta + \delta) &= \alpha \cdot \sup\{\beta + \xi : \xi < \delta\} && [\text{tanım}] \\
&= \sup\{\alpha \cdot (\beta + \xi) : \xi < \delta\} && [\eta \mapsto \alpha \cdot \eta \text{ normaldir}] \\
&= \sup\{\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \xi : \xi < \delta\} && [\text{hipotez}] \\
&= \alpha \cdot \beta + \sup\{\alpha \cdot \xi : \xi < \delta\} && [\eta \mapsto \alpha \cdot \beta + \eta \text{ normaldir}] \\
&= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta, && [\text{tanım}]
\end{aligned}$$

dolayısıyla $\gamma = \delta$ olduğu durumda doğrudur.