

Öklid'in *Porizmalar*'ı için
Derleme'nin
VII. Kitabının
38 Lemmasından
İlk 19 Lemma

İskenderiyeli Pappus
Çeviren David Pierce

13 Mart 2022

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
mat.msgsu.edu.tr/~dpierce
polytropy.com/geometriler

Bu çalışma
Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0
Unported Lisansı ile lisanslı.

Lisansın bir kopyasını görebilmek için,
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/>
adresini ziyaret edin ya da mektup atın:

Creative Commons,
444 Castro Street, Suite 900,
Mountain View, California, 94041, USA.

CC BY: David Pierce 

david.pierce@msgsu.edu.tr

İçindekiler

Giriş	5
Oranlar ve orantılar	24
Thales, Pappus, ve Desargues	41
Pappus'tan 19 Lemma	49
Lemma I	50
İkinci kanıtı	51
Lemma II	54
Lemma III	56
İkinci kanıtı	58
Lemma IV	60
Lemma V	62
Lemma VI	64
Lemma VII	66
Lemma VIII	68
Lemma IX	70

Lemma X	72
Lemma XI	76
Lemma XII	78
Lemma XIII	80
Lemma XIV	82
Lemma XV	84
Lemma XVI	86
Lemma XVII	88
Lemma XVIII	90
Lemma XIX	92
Ek	94
Fiiller Sözlüğü	94
Edatlar Sözlüğü	96
Yunan Alfabeti	98
Kaynakça	99
<i>Analiz Hazinesi</i> 'nin içindekiler	104

Giriş

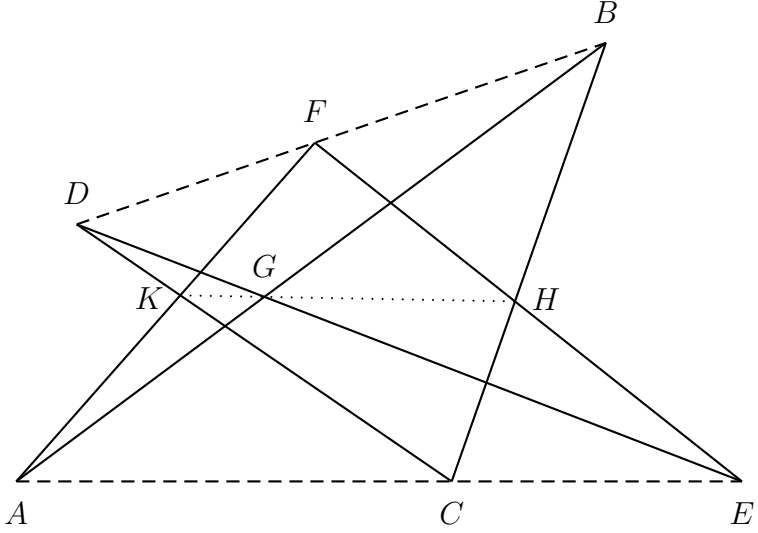
İskenderiyeli Pappus (Πάππος Ἀλεξανδρεύς), M.S. 320 yılı civarında *Derleme* (Συναγωγή) adlı eserini yazdı. *Derleme*'nin yedinci kitabı, *Analiz Hazinesi* (Αναλυόμενος τόπος) adlı eserler için bir rehberdir. *Hazine*'nin içindekiler, şimdi okuduğunuz kitapçığın arka sayfasındadır. (Bu bilgi, [27, s. 564, 598–601] kaynağında bulunur.) Apollonius'un *Koni Kesitleri* ve Öklid'in *Veriler*'i hariç, *Hazine*'nin çoğu şimdi kaybolmuştur. Özel olarak Öklid'in *Porizmalar*'ı (Πορίσματα) kaybolmuştur. Ama onu okumaya yardımcı olmak için, Pappus 38 lemmayı verir. Onların ilk 19'nun çevirisi, bu kitapçığı oluşturur.

Altıgen ve Dörtgen teoremleri

Pappus'un Lemma I'i ve Lemma XIX'u arasından iki önemli teorem çıkar. Her biri bir düzlemde doğrudur.

1. Birbirinden farklı olan altı nokta verilsin ve A, B, C, D, E , ve F olsun. Ayrıca Şekil 1'deki gibi E noktası, AC doğrusunda olsun ve F noktası, BD doğrusunda olsun. Burada bir doğru, doğru parçası değildir, sınırsız bir doğrudur. Özel olarak A, C , ve E 'nin sırası ve B, D , ve F 'nin sırası önemli değildir. Şimdi AB, BC, CD, DE, EF , ve FA doğrusu, bir altıgenin kenarıdır. Altıgenin kendisi, $ABCDEF$ olarak yazılabilir. Bu altıgenin karşıt

- AB ve DE kenarı G 'de,
- BC ve EF kenarı H 'de,
- CD ve FA kenarı K 'de

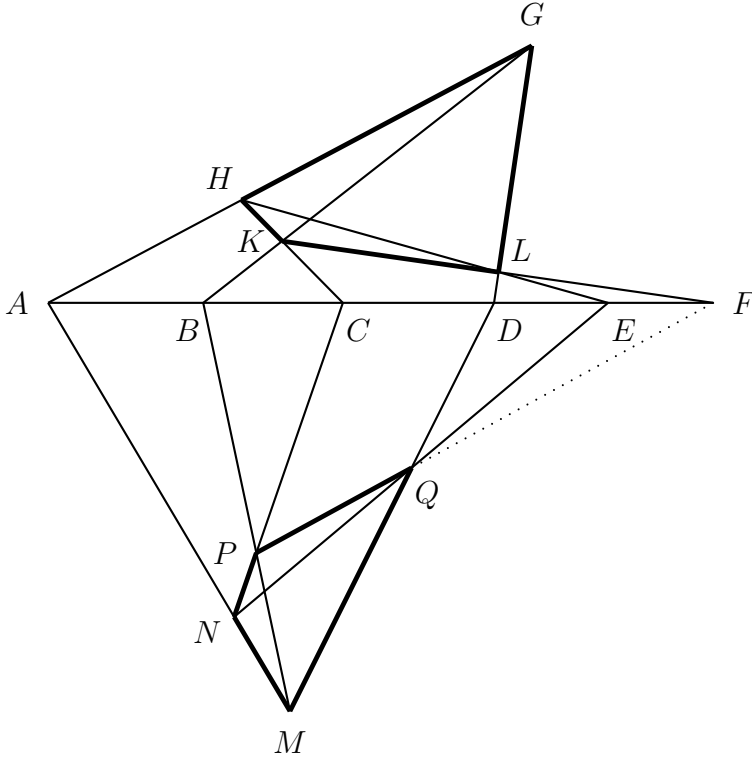


Şekil 1: Altıgen Teoremi

kesişsinler. **Altıgen Teoremi'ne** göre K noktası, GH doğrusundadır. Kısaca eğer bir altıgenin köşeleri münavebe ile iki doğruda oturursa, o zaman altıgenin karşıt kenarlarının kesişim noktaları da bir doğruda oturur.

2. Şimdi dört nokta verilsin, ve bunlardan hiçbir üçlü bir doğruda oturmasın. **Dörtgen Teoremi'ne** göre, eğer bu dört noktanın ikilerinden geçen altı doğru bir doğruyu keserse, o zaman kesişim noktalarından beşi, altıncıyı belirler. Örneğin Şekil 2'de $GHLK$ dörtgeninin köşelerinin ikisinden geçen doğrular, AF doğrusunu A, B, C, D, E , ve F noktalarında keser, ve $MNPQ$ dörtgeninin köşelerinin ikisinden geçen beş doğru, sırasıyla A, B, C, D ve E noktalarından geçer, dolayısıyla kalan PQ doğrusu, F noktasından geçer.

Aslında Altıgen ve Dörtgen Teoremi'nin her birinin sadece bir durumunu verdik. Teoremlerde kesişmek yerine iki doğru

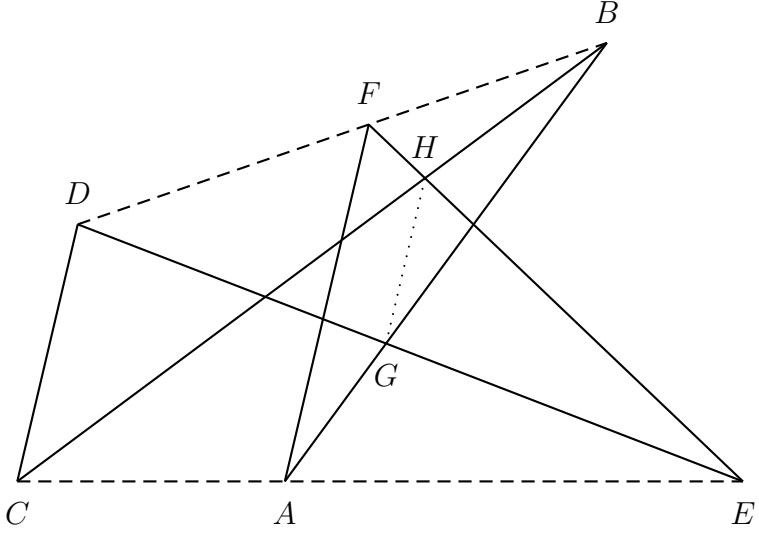


Şekil 2: Dörtgen Teoremi

paralel olabilir. Örneğin eğer Şekil 3'teki gibi $ABCDEF$ altıgeninde karşıt CD ve FA kenarları paralel ise, o zaman bu kenarlar GH 'ye paraleldir.

Öklid'in *Porizmalar*'ı için Pappus'un lemmalardan:

- 1) Lemma VIII, XII, ve XIII, Altıgen Teoremi'nin bazı durumlarıdır, ve son iki lemma, Lemma III, X, ve XI'i kullanır;
- 2) Lemma I, II, IV, V, VI, ve VII'nin konusu, Dörtgen Teoremi'dir.



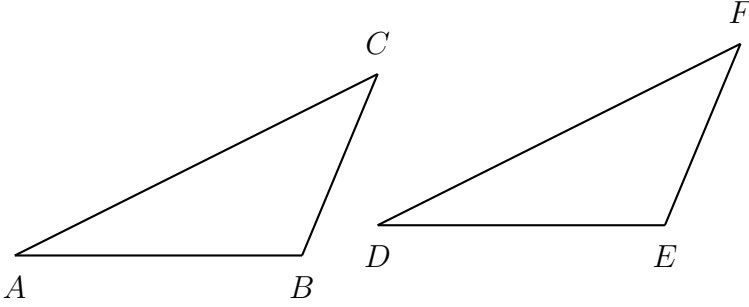
Şekil 3: Altıgen Teoremi'nin başka bir durumu

İzdüşümsel geometri

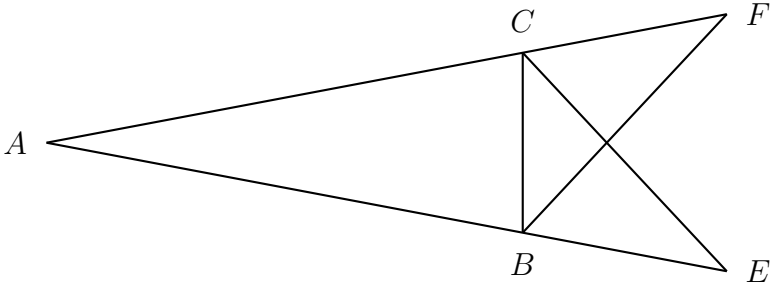
Eğer Altıgen veya Dörtgen Teoremi'nin bir durumunun şekli cama çizilirse, o zaman şeklin gölgesi veya *izdüşümü*, teoremin aynı veya farklı bir durumunun şekli olur. Kısaca teoremlerin her biri, **izdüşümsel** (veya *projektif*) **düzlem geometrisinin** bir teoremidir. Bu geometride iki doğru her zaman bir noktada kesişir.

Öklid düzleminden izdüşümsel düzlemi elde etmek için, *sonsuzda olan* noktalar ekleriz. Bunu anlamak için, Öklid'in *eşitlik* ve *paralellik* kavramlarına bakarız.

Öklid'in *Öğeler*'inde *eşit* (ἴσος), *aynı* (αὐτός) değildir, ama bir şey, kendisine eşit olarak kabul edilir. Örneğin Kitap I'in Önerme 4'üne göre ABC ve DEF üçgeninde, eğer Şekil 4'teki gibi



Şekil 4: Öklid I.4 ve 8



Şekil 5: Öklid I.5

$$AB = DE, \quad BC = EF, \quad \angle ABC = \angle DEF$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned} AC &= DF, & \triangle ABC &= \triangle DEF, \\ \angle BCA &= \angle EFD, & \angle CAB &= \angle FDE. \end{aligned}$$

Önerme 5'te eğer öyle bir ABC üçgeni verilirse ki $AB = AC$ ise, ve Şekil 5'teki gibi

- AB , öyle bir E noktasına,
- AC , öyle bir F noktasına

uzatılırsa ki $AE = AF$ ise, o zaman $\angle CAE$ ve $\angle BAF$, $\angle BAC$ ile aynı olduğundan birbiriyle aynıdır, dolayısıyla birbirine eşit sayılabilir. Bu durumda

$$CA = BA, \quad AE = AF, \quad \angle CAE = \angle BAF,$$

dolayısıyla, Önerme 4 sayesinde,

$$\begin{aligned} CE &= BF, & \triangle CAE &= \triangle BAF, \\ \angle AEC &= \angle AFB, & \angle ECA &= \angle FBA. \end{aligned}$$

Böylece Öklid için bir açı, kendisine eşit olarak sayılabilir. Benzer bir şekilde bir doğru, kendisine eşit olarak sayılabilir. Örneğin Önerme 8'e göre ABC ve DEF üçgeninde, eğer Şekil 4'teki gibi

$$AB = DE, \quad BC = EF, \quad AC = DF$$

ise, o zaman

$$\angle ACB = \angle DEF, \quad \angle BAC = \angle EDF, \quad \angle ABC = \angle DEF.$$

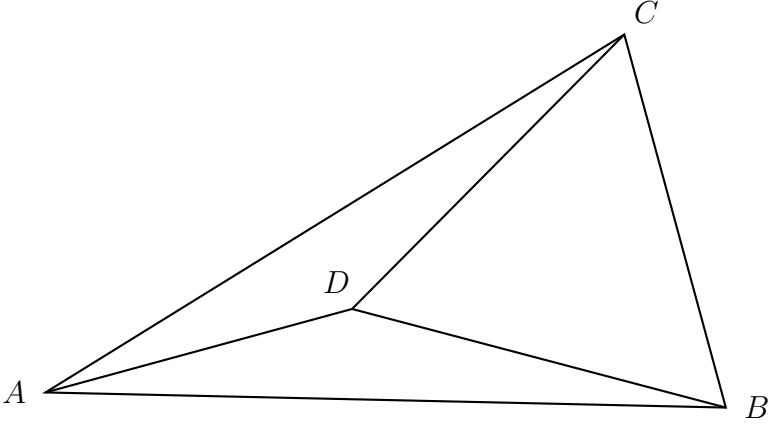
Önerme 9'da bir BAC açısı verilmiş olduğunda, eğer Şekil 6'daki gibi $AB = AC$ ise, ve eşkenar BCD üçgeni inşa edilirse, o zaman ABD ve ACD üçgenlerinde

$$AB = AC, \quad BD = CD,$$

ve ayrıca AD ortak olduğundan kendisine eşit sayılır, dolayısıyla, Önerme 8 sayesinde,

$$\angle BAD = \angle CAD.$$

Bu şekilde bir açı ikiye bölünür.



Şekil 6: Öklid I.9

Kısaca açılar ve doğruların eşitliği, yansımali bir bağıntıdır. Öklid için eşitliğin simetrik olduğu açıktır. Ortak bir kavram sayesinde aynı şeye eşit olanlar birbirine eşit olduğundan, eşitlik geçişlidir. Böylece eşitlik bir denklik bağıntısıdır.

Benzer bir şekilde bir doğru, kendisine paralel olarak sayılabilir. O zaman Öklid'in *Öğeler*'inin Kitap I'inin

Önerme 31'i sayesinde verilen bir noktadan geçen, verilen bir doğruya paralel olan bir doğru çizilebilir;

Önerme 29'una göre aynı noktadan geçen, aynı doğruya paralel olan başka bir doğru yoktur;

Önerme 30'una göre aynı doğruya paralel olan doğrular birbirine de paraleldir.

Bundan dolayı paralellik, bir denklik bağıntısıdır.

Doğruların her paralellik sınıfı için, Öklid düzlemine yeni bir nokta ekleyebiliriz. Eklenen nokta, **sonsuzdadır**, ve paralellik sınıfındaki doğrular, bu sonsuzda olan noktada kesişir.

Tüm sonsuzda olan noktalar, **sonsuzdaki doğruyu** oluşturu-

rur. Öklid düzleminin noktaları ve sonsuzda olan noktalar, **izdüşümsel düzlemin** noktalarıdır, ve Öklid düzleminin doğruları ve sonsuzdaki doğru, izdüşümsel düzlemin doğrularıdır. İzdüşümsel düzlemde Altıgen ve Dörtgen teoremlerinden her birinin tek bir durumu vardır.

Oran ve orantı

Pappus, Altıgen ve Dörtgen teoremlerini Öklid düzleminde kanıtlar, ve bunun için *alanlar* ve *orantılar* kullanır.

Açılar ve doğrular için gördüğümüz gibi eşitlik, bir denklik bağıntısıdır.

- Sınırlanmış bir doğrunun eşitlik sınıfı, doğrunun **uzunluğudur**.
- Sınırlanmış bir yüzeyin eşitlik sınıfı, yüzeyin **alanıdır**.
- Sınırlanmış bir cismin eşitlik sınıfı, cismin **hacimidir**.

Her sınırlanmış doğru, yüzey, veya cisim, bir **büyükliktür** (τὸ μέγεθος). Cinsi aynı olan iki büyüklüğün **oranı** (ὁ λόγος) vardır. Eğer büyüklüklerin birinin yerini eşit bir büyüklük konulursa, oran değişmez. Bu şekilde iki uzunluğun, alanın, veya hacmin oranı vardır.

Oranların soyut kuramı, *Öğeler*'in Kitap V'indedir. Öklid'in tanımladığı her oranı, pozitif gerçel sayı olarak görebileceğiz.

Aslında Öklid, oranları değil, sadece büyüklüklerin *oranının aynı* (ἀνάλογον) olmasını tanımlar. Öklid'in tanımı aşağıda verilir; şimdilik tanımın sadece kullanacağımız sonuçlarını vereceğiz.

Bir AB doğrusunun, bir $\Gamma\Delta$ doğrusuna oranı vardır. Bu oranı

$$AB : \Gamma\Delta$$

olarak yazacağız; Pappus

λόγος ὃν ἔχει ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ
(AB'nın ΓΔ'ya oranı)

ifadesini kullanıyor.

Eğer AB ve ΓΔ doğru ise, genişliği AB'nın uzunluğu olan ve yüksekliği ΓΔ'nın uzunluğu olan bir dikdörtgen inşa edilebilir, ve bu dikdörtgeni

$$AB \cdot \Gamma\Delta$$

ifadesiyle yazacağız; Pappus

$$\tau\acute{o} \ \acute{\upsilon}\pi\acute{o} \ AB \ \Gamma\Delta \quad (AB \text{ ve } \Gamma\Delta \text{ altındaki})$$

ifadesini kullanıyor. Şimdi $AB \cdot \Gamma\Delta$ dikdörtgeninin, bir $EZ \cdot H\Theta$ dikdörtgenine oranı vardır. Bu oranı

$$AB \cdot \Gamma\Delta : EZ \cdot H\Theta$$

olarak yazacağız.

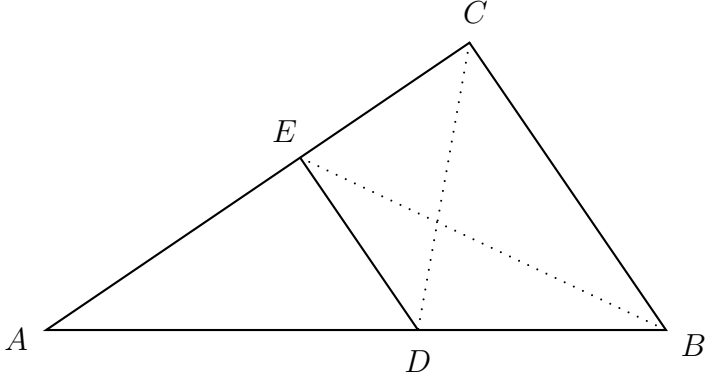
Öğeler'in Kitap I'inin 36. ve 38. önermelerine göre aynı paralellerde olan ve eşit tabanlarda olan iki paralelkenar veya üçgen birbirine eşittir. Tabanlar eşit olmasa bile onların oranı vardır, ve çokgenlerin oranı da vardır, ve Kitap VI'nın ilk önermesine göre bu iki oran aynıdır.

İki oranın aynılığı, bir **orantıdır** (ἡ ἀναλογία). Eğer böyle bir aynılığı :: işareti ile gösterirsek, o zaman Şekil 7'de

$$\begin{aligned} AD : DB &:: ADE : DBE, \\ AE : EC &:: ADE : DCE \end{aligned}$$

orantıları vardır. Ayrıca eğer

$$DE \parallel BC$$



Şekil 7: Thales Teoremi

ise, o zaman

$$DBE = DCE,$$

ve bu durumda

$$ADE : DBE :: ADE : DCE,$$

dolayısıyla

$$AD : DB :: AE : EC.$$

Bu sonuç ve tersi, Öklid'in Önerme VI.2'sidir, ve bugün ona **Thales Teoremi** denir. Pappus bu teoremi sık sık kullanır.

Şimdi bir

$$A : B :: C : D$$

orantısı verilsin. Oranların aynılığı bir denklik bağıntısı olduğundan

$$C : D :: A : B$$

orantısı da doğrudur. Ayrıca *Öğeler*'in Kitap V'ine göre

- **tersine** (ἀνάπαλιν)

$$B : A :: D : C,$$

- **toplamayla** (συνθέντι)

$$A + B : B :: C + D : D,$$

- **çevirmeyle** (ἀναστρέψαντί) $A > B$ ise

$$A - B : B :: C - D : D,$$

- **izlemeyle** (ἐναλλάξ) A 'nın C 'ye oranı varsa

$$A : C :: B : D.$$

Bir kural daha vardır: **eşitlikten** (διδί' ἴσου)

$$\left. \begin{array}{l} A : B :: D : E \\ B : C :: E : F \end{array} \right\} \text{ ise } A : C :: D : F,$$

ve daha genelde, eğer $A_1, \dots, A_n$ ve $B_1, \dots, B_n$ büyüklükleri verilirse, ve her durumda

$$A_k : A_{k+1} :: B_k : B_{k+1}$$

ise, o zaman eşitlikten

$$A_1 : A_n :: B_1 : B_n.$$

Herhalde Öklid “eşitlikten” diyor çünkü çokluklar olarak A_k 'lerin ve B_k 'lerin sayıları birbirine eşittir.

Tanıma göre $A : B$ ve $B : C$ oranlarının **bileşimi** (συνάπτω fiilinden συνημμένος), $A : C$ oranıdır. Eğer

$$B : C :: D : E$$

ise, o zaman $A : C$ oranı, $A : B$ ve $D : E$ oranlarının bileşimiyle aynıdır, ve bu orantıyı

$$A : C :: (A : B)(D : E)$$

biçiminde yazacağız. Örneğin aşağıdaki Lemma I'in iki kanıtında Pappus

ὁ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΖ συνῆπται
 ἔκ τε τοῦ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ
 καὶ τοῦ τῆς ΕΘ πρὸς ΘΗ
 (ΑΔ'ınki ΔΖ'ya bileşir
 ΑΒ'ninkinden ΒΕ'a
 ve ΕΘ'ninkinden ΘΗ'ya)

orantısını yazıyor; bunu

$$ΑΔ : ΔΖ :: (ΑΒ : ΒΕ)(ΕΘ : ΘΗ)$$

olarak yazacağız. Lemma III'te Pappus

τοῦ ὑπὸ ΘΕ ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗ ΖΕ συνῆπται
 λόγος
 ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ
 καὶ τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΘ
 (ΘΕ ΗΖ altındakinin ΘΗ ΖΕ altındakine bileşir
 oranı
 ΘΕ'ninkinden ΕΖ'ya
 ve ΖΗ'ninkinden ΗΘ'ya)

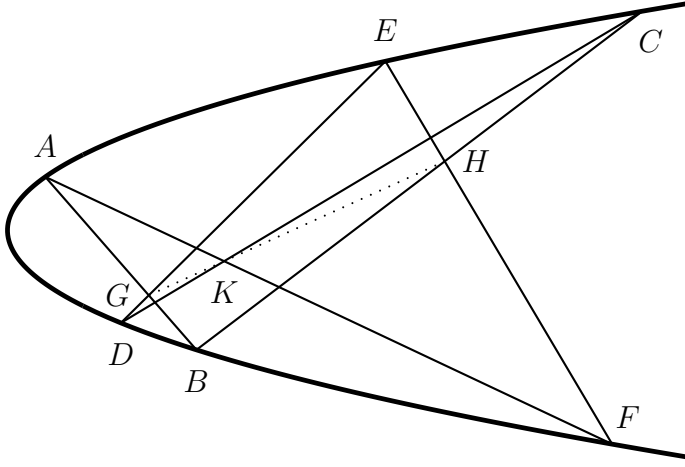
orantısını yazıyor; bunu

$$ΘΕ \cdot ΗΖ : ΘΗ \cdot ΖΕ :: (ΘΕ : ΕΖ)(ΖΗ : ΗΘ)$$

olarak yazacağız.

Pascal Teoremi

Altıgen Teoremi'nin daha genel bir biçimi vardır. Bir altıgenin köşeleri bir koni kesitindeyse, karşıt kenarların kesişim noktaları bir doğrudadır. Örneğin Şekil 8'de A , B , C , D , E , ve F



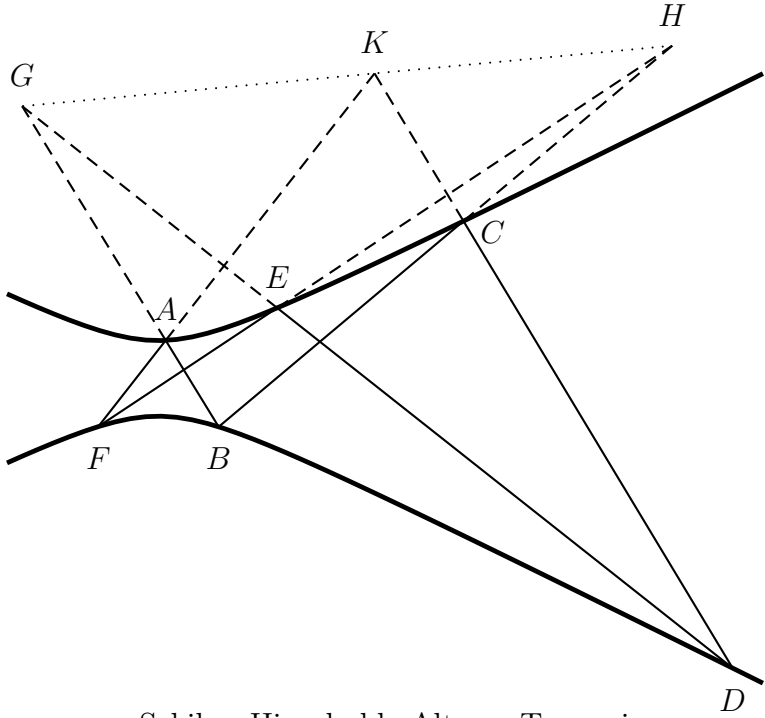
Şekil 8: Parabolde Altıgen Teoremi

noktaları bir parabolde, ve (sonuç olarak) G , H , ve K bir doğrudur.

Bi altıgenin karşıt kenarlarının kesişmesi için onlar uzatılmak zorunda olabilir. Örneğin Şekil 9'da A , B , C , D , E , ve F noktaları bir hiperbolün dallarındadır, ve (sonuç olarak) G , H , ve K bir doğrudur.

Dediğimiz gibi, bir altıgenin karşıt kenarları paralel olabilir. Örneğin Şekil 10'da, AF ve CD birbirine paralel ise, o zaman GH de onlara paraleldir.

Altıgen Teoremi'nin genel biçimine **Pascal Teoremi** denir, çünkü Blaise Pascal 1640 yılında, 16 yaşında, teoremi bildirdi. (Pascal'ın orijinali, [25] kaynağındadır; İngilizce çevirisi, [22, s. 326–30] ve [24, s. 163–8] kaynaklarındadır.)



Şekil 9: Hiperbolde Altıgen Teoremi

Porizmalar

Proklus'a göre **porizma** ($\tau\omicron$ $\pi\omicron\rho\iota\sigma\mu\alpha$) sözcüğünün iki anlamı vardır ([21, s. 236] veya [26, s. 478–81] kaynaklarından).

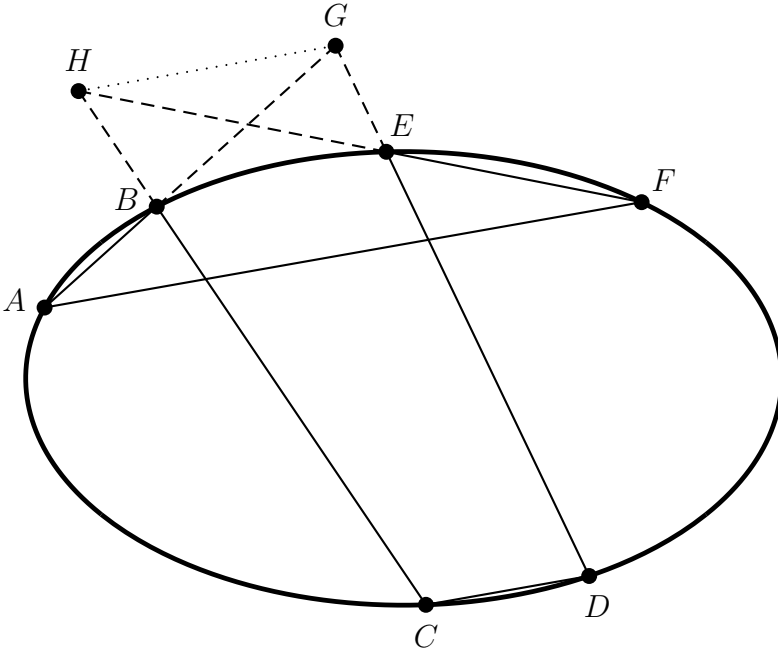
1. Birinci anlamına göre bir porizma, kanıtının başka bir önermenin kanıtından kolayca çıktığı bir önermedir.

2. İkinci anlamına göre bir porizma, önermelerin üçüncü bir çeşitidir:

bir teoremden bir şey *görülüyor*;

bir problemde bir şey *yapılıyor*;

bir porizmada bir şey *bulunuyor*.



Şekil 10: Elipste Altıgen Teoremi'nin paralel durumu

Örneğin

- ikizkenar bir üçgenin tabanındaki açılarının eşitliği bir teoremdir;
- verilen açıyı ikiye bölmek bir problemidir;
- bir dairenin merkezini bulmak bir porizmadır.

Öklid'in *Öğeler*'inin Kitap VII'nin Önerme 2'sinde, birbirine asal olmayan iki sayının en büyük ortak böleni bulunur. Bu şekilde o önerme bir porizmadır, ve bundan birinci anlamıyla bir porizma çıkar: birbirine asal olmayan sayıların her ortak böleni, en büyük ortak bölenini böler.

Orantıların tanımı

Bir büyüklüğün **katı** (πολλαπλασίον) alınabilir. Örneğin A bir büyüklük ise, katları

$$A, \quad A + A, \quad A + A + A, \quad \dots$$

toplamlarıdır. Bunlar A, 2A, 3A, ... olarak yazılabilir. A gibi A'nın katları, büyüklüktürler. Aslında A'nın herhangi bir katı

$$kA$$

biçiminde yazılabilir. Buradaki k katsayısı, bir sayma sayısıdır. Sayma sayılarının oluşturduğu küme

$$\mathbb{N}$$

olarak yazılabilir, ve k 'nın sayma sayısı olduğunu göstermek için

$$k \in \mathbb{N}$$

ifadesini yazarız; ama Öklid bunun gibi ifadeler kullanmaz. Öklid için k ifademiz, isim değil, sıfat olurdu. Aslında *Öğeler*'in yedinci kitabındaki tanıma göre bir sayı (ὁ ἀριθμός), birimlerin (τὰ μονάδα) oluşturduğu bir çokluktur (τὸ πλῆθος). Bu tanıma göre bir kA katının kendisi bir sayıdır. Öklid için eğer B A'ya eşit olmayan bir büyüklük ise, o zaman kA ve kB büyüklük olarak birbirine eşit değildir, ama **kat olarak birbirine eşittir**, yani **eşit katlardır** (ἰσάκις πολλαπλασία).

Bazen A ve B büyüklükleri karşılaştırabilir: A B'dan büyük veya küçük olabilir, ve (büyüklük olarak) ikisi birbirine eşit olabilir. Sırasıyla

$$A > B, \quad A < B, \quad A = B$$

ifadelerini yazarız. İki büyüklüğün her biri doğru veya her biri yüzey ise, o zaman varsayıma göre büyüklüklerin her birinin diğerinden büyük olan bir katı vardır. Bu varsayıma **Arşimet Aksiyomu** denir, çünkü Arşimet onu yazıp kullandı [1, s. 36]; ama Arşimet'ten önce Öklid onu kullandı. Öklid, M.Ö. 300 civarında çalışıyordu; Arşimet, M.Ö. 212 yılında Siraküza'nın Romalılar tarafından alınmasında öldürüldü.

Eğer iki büyüklük Arşimet Aksiyomunu sağlarsa, o zaman tanıma göre bu büyüklüklerin **oranı vardır**, veya büyüklükler, bir **orana** sahiptir. O halde A ve B'nin oranı vardır ancak ve ancak bir k sayma sayısı için

$$A < B < kA \quad \text{veya} \quad B < A < kB \quad \text{veya} \quad A = B.$$

Bu durumda bir orana sahip olma, bir denklik bağıntısıdır.

A ve B'nin oranı olsun. N'de herhangi k ve m için, eğer

$$mA < kB \quad \text{veya} \quad mA > kB \quad \text{veya} \quad mA = kB$$

ise, o zaman sırasıyla

$$A : B < k : m \quad \text{veya} \quad A : B > k : m \quad \text{veya} \quad A : B :: k : m$$

ifadesini yazalım. Şimdi Γ ve Δ 'nın oranı da olsun. Ayrıca her k ve her m için

- $A : B < k : m$ ise $A : \Gamma < k : D$ olsun;
- $A : B > k : m$ ise $A : \Gamma > k : D$ olsun;
- $A : B :: k : m$ ise $A : \Gamma :: k : D$ olsun.

O zaman Öklid'in tanımına göre

- A'nın B'ya oranı, Γ 'nın Δ 'ya oranı ile aynıdır;
- A, B, Γ , ve Δ orantılıdır.

Bu durumda

$$A : B :: \Gamma : \Delta$$

ifadesini yazarız, ama yukarıda gördüğümüz gibi Öklid ve Pappus sadece sözler kullanırlar. Örneğin aşağıdaki Lemma III'de $K\Theta$ 'nın $\Theta\Lambda$ 'ya oranı, $\Theta\Delta \cdot B\Gamma$ 'nin $\Theta B \cdot \Gamma\Delta$ 'ya oranıyla aynıdır, dolayısıyla

$$K\Theta : \Theta\Lambda :: \Theta\Delta \cdot B\Gamma : \Theta B \cdot \Gamma\Delta$$

ifadesini yazıyoruz, ama Pappus

$$\omega\varsigma \ \eta \ K\Theta \ \pi\rho\acute{o}\varsigma \ \eta \ \Theta\Lambda, \\ \omicron\upsilon\tau\omega\varsigma \ \tau\acute{o} \ \acute{\upsilon}\pi\omicron \ \Theta\Delta \ B\Gamma \ \pi\rho\acute{o}\varsigma \ \tau\acute{o} \ \acute{\upsilon}\pi\omicron \ \Theta B \ \Gamma\Delta$$

(Nasıl $K\Theta$ $\Theta\Lambda$ 'ya olursa
böyle $\Theta\Delta$ $B\Gamma$ altındaki ΘB $\Gamma\Delta$ altındakine olur)

yazıyor.

Pappus'un metninin bulunduğu el yazmasında, kısaltmalar kullanılır, ama matematik kavramları değil, sadece sözcükler için [19, p. 28–9].

Bu metin hakkında

Aşağıdaki çeviri için Hultsch'un [18] edisyonunu kullandım. Sadece bittikten sonra Jones'un [19] edisyonunu bulup onunla yaptığımı düzelttim.

Derleme'nin Kitap VII'sinde iki sıra vardır. Birinde 321 bölüm vardır; diğesinde 238 önerme vardır. Hultsch her sıra için Arap rakamlarını kullanır. Ayrıca Öklid'in *Porizmalar*'ı hakkındaki lemmalara Romen rakamları koyar. Yukarıda bahsettiğimiz gibi Pappus, oran ve orantılar için özel işaretler kullanmaz. Lemmaların kanıtlarını “*Kanıt*” ve $\square$ arasına yazıyorum; Pappus bunun gibi ifadeler kullanmaz.

Dizgi için L^AT_EX yazılımını ve KOMA-Script *scrbook documentclass*'ını kullandım. Diyagramları, *pstricks* ve *pst-eucl*

package’ları ile çizdim. Kullandığım Yunan fontu, Yunan Font Derneği’nin *gfsneohellenic* fontudur.

Oranlar ve orantılar

Öklid'in *Öğeler*'inde orantılılık için iki kuram vardır:

- Kitap V'te, *büyüklikler* (sınırlı doğrular, yüzeyler, cisimler) için;
- Kitap VII'de, sayılar için.

Gerçel sayıları tanımlamak için Dedekind, Öklid'in büyüklüklerin orantılılığı kuramını kullandı [4]. Bugün Öklid'in sayıların orantılılığı kuramını anlamak zordur, ama anladığım kadarıyla Öklid Algoritması üstüne kurulur. Bu algoritma ile büyüklüklerin orantılılığı bile anlaşılabilir. Bu konuda burada bazı ayrıntılar vermek istiyorum.

Sayılar

Öğeler'in VII'nci kitabında, bir **sayı**, birimlerin oluşturduğu bir çokluktur. Öklid'in diyagramlarında, sayılar ve onların birimleri, sınırlanmış doğrudurlar. Örneğin 4 sayısı, Şekil 11'deki gibi çizilebilir. Sayılar toplanabilir, ve tekrar tekrar toplanabilir; örneğin

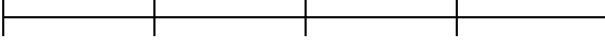
$$4 + 4 + 4 = 12.$$

Bu toplam, 3 kere 4'tür; kısaca

$$4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4.$$

Bundan dolayı

- 4, 12'yi **ölçer**;
- 3, 12'yi **böler**.



Şekil 11: 4 sayısı

Genelde, k ve a sayıları verildiğinde, $k \cdot a$ **çarpımı** vardır. Burada

$$k \cdot a = \underbrace{a + \cdots + a}_k;$$

kısaca

$$k \cdot a = a + \cdots + a.$$

O zaman

- k , $k \cdot a$ çarpımının bölenidir;
- a , $k \cdot a$ çarpımının ölçüsüdür.

Bu şekilde ölçmenin ve bölmenin tanımları farklıdır. Öklid gibi bu işlemlerin sonuçlarının aynı olduğunu kanıtlayacağız.

Öklid Algoritması ile iki sayının en büyük ortak ölçüsünü buluruz. Örneğin

$$\begin{aligned} 62 &= 4 \cdot 14 + 6, \\ 14 &= 2 \cdot 6 + 2, \\ 6 &= 3 \cdot 2, \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned} 62 &= 4 \cdot 14 + 6, \\ 14 &= 2 \cdot 6 + 2, \\ 6 &= 3 \cdot 2, \end{aligned}$$

dolayısıyla 62 ve 14'ün en büyük ortak ölçüsü 2'dir. Aynı

şekilde

$$93 = 4 \cdot 21 + 9,$$

$$21 = 2 \cdot 9 + 3,$$

$$9 = 3 \cdot 3,$$

dolayısıyla 93 ve 21'in en büyük ortak ölçüsü 3'tür.

İki hesabımızda, $(4, 2, 3)$ bölenler listesi ortaktır. Sonuç olarak 62'nin 14'e *oranı*, 93'ün 21'e *oranı ile aynıdır*; kısaca

$$62 : 14 :: 93 : 21.$$

Genelde, $a > b$ olduğunda, bir ve tek bir $(m_1, \dots, m_n)$ sayılar listesi vardır ki bazı $(a_1, \dots, a_{n+1})$ sayılar listesi için

$$a = a_1, \quad b = a_2 > \cdots > a_{n+1}$$

ve $\{a, b\}$ çifti için Öklid Algoritmasının aşağıdaki n adımı vardır:

$$a_1 = m_1 \cdot a_2 + a_3,$$

.....

$$a_{n-1} = m_{n-1} \cdot a_n + a_{n+1},$$

$$a_n = m_n \cdot a_{n+1}.$$

Bu durumda

- a_{n+1} sayısı, $\{a_1, a_2\}$ çiftinin en büyük ortak ölçüsüdür;
- $(m_1, \dots, m_n)$ listesi, $\{a_1, a_2\}$ çiftinin **karşılıklı çıkarma dizisi** veya **antifiretik dizidir**.

Öklid Algoritması'nın yöntemi, karşılıklı çıkarmadır, ki Yunanca'da ἀνθυφαίρεσις (Latince'de *anthyphaeresis*).

Eğer $\{c, d\}$ çiftinin antifiretik dizisi, $\{a, b\}$ çiftininki ile aynı ise, o zaman (en eski tanıma göre) çiftlerin **oranı aynıdır**, yani

Eğer $\{a, b\}$ ve $\{c, d\}$ orantılı ise, ve ayrıca $a > b$ ve $c > d$ ise, o zaman

$$a : b :: c : d, \qquad b : a :: d : c$$

ifadelerini yazarız. Bunların her biri, ve onun ifade ettiği anlamlık, bir **orantıdır**.

Öklid Algoritması'nın yukarıdaki n adımında a_{n+1} , her a_i sayısının bir ölçüsüdür. Şimdi a_{n+1} , e olarak yazalsın. O zaman öyle $(k_1, \dots, k_n)$ vardır ki

$$a_1 = k_1 \cdot e, \quad \dots, \quad a_n = k_n \cdot e,$$

dolayısıyla algoritmanın adımları,

[illegible]

Burada e 'nin yerine herhangi f sayısı konulabilir. Şimdi

$$k_1 = k, \quad k_2 = \ell$$

olsun. O zaman

$$a = k \cdot e, \quad b = \ell \cdot e,$$

ve herhangi c ve d için, onların en büyük ortak ölçüsü f olduğunda,

$$a : b :: c : d$$

ancak ve ancak

$$c = k \cdot f, \quad d = \ell \cdot f.$$

Şonuç olarak

$$\boxed{a : b :: a : c \quad \text{ise} \quad b = c}.$$

Toplama birleşmeli ve değışmelidir:

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a + b = b + a.$$

Bundan dolayı

$$\begin{aligned} k \cdot (a + b) &= (a + b) + \cdots + (a + b) \\ &= (a + \cdots + a) + (b + \cdots + b) \\ &= k \cdot a + k \cdot b. \end{aligned}$$

Sonuç olarak, yukarıda gördüğümüzden

$$\boxed{a : b :: c : d \quad \text{ise} \quad a : b :: (a + c) : (b + d)}.$$

Bundan

$$a : b :: (a + \cdots + a) : (b + \cdots + b),$$

yani

$$\boxed{a : b :: k \cdot a : k \cdot b}.$$

Şimdi yine

$$a : b :: c : d$$

olsun, dolayısıyla

$$\begin{aligned} a &= k \cdot e, & b &= \ell \cdot e, \\ c &= k \cdot f, & d &= \ell \cdot f \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$e : f :: k \cdot e : k \cdot f$$

olduğundan

$$e : f :: a : c.$$

Aynı şekilde

$$e : f :: b : d,$$

dolayısıyla

$$a : c :: b : d.$$

Kısaca

$$\boxed{a : b :: c : d \text{ ise } a : c :: b : d.}$$

Şimdi

$$a \cdot 1 = a, \quad 1 : b :: a \cdot 1 : a \cdot b$$

olduğundan

$$1 : b :: a : a \cdot b,$$

dolayısıyla

$$1 : a :: b : a \cdot b.$$

Aynı zamanda

$$1 : a :: b : b \cdot a,$$

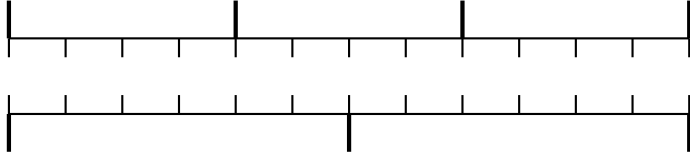
dolayısıyla

$$b : a \cdot b :: b : b \cdot a.$$

Sonuç olarak

$$\boxed{a \cdot b = b \cdot a.}$$

Böylece bir çarpımın ölçüleri ve bölenleri aynıdır, dolayısıyla çarpma değişmelidir.



Şekil 12: $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$

Tekrar

$$a : b :: c : d$$

olsun, dolayısıyla bazı e , f , k , ve ℓ için

$$a = k \cdot e, \quad b = \ell \cdot e, \quad c = k \cdot f, \quad d = \ell \cdot f.$$

Çarpma değişmeli olduğundan

$$a \cdot d = k \cdot e \cdot \ell \cdot f = \ell \cdot e \cdot k \cdot f = b \cdot c;$$

kısaca

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

Tersi de doğru olmalı. Böylece

$$\boxed{a : b :: c : d \quad \text{ancak ve ancak} \quad a \cdot d = b \cdot c.}$$

Bu denklik, orantılılığın tanımı olarak kullanılabilir, ama bu durumda oranı aynı olma bağıntısının geçişli olduğu, tamamen açık değildir.

Öklid için eşitlik, geometrik bir kavramdır. Örneğin

$$2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$$

eşitliği, Şekil 12'deki gibi çizilebilir. Bugün aynı eşitlik,

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

biçiminde yazılabilir, ama burada $2/3$ veya $4/6$ 'nın kendisi için açık bir geometrik anlamı yoktur. Genelde a ve b sayısı için a/b ,

$$\{(x, y) : a : b :: x : y\}$$

denklik sınıfı olarak tanımlanabilir. Bir

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

eşitliğine göre (a, b) ve (c, d) 'nin birbirinden farklı olabildiği halde denklik sınıfları aynıdır, yani

$$a : b :: c : d.$$

Büyüklikler

Bir sayı oluşturan birimler, sınırlanmış doğru, yüzey, veya cisim olabilir. Bunların her biri, bir **büyükliktir**. Cinsi aynı olan büyüklikler karşılaştırılabilir. Örneğin bir A büyüklüğü, bir B büyüklüğünden büyük veya küçük olabilir, ve ikisi birbirine eşit olabilir. Bu durumda sırasıyla

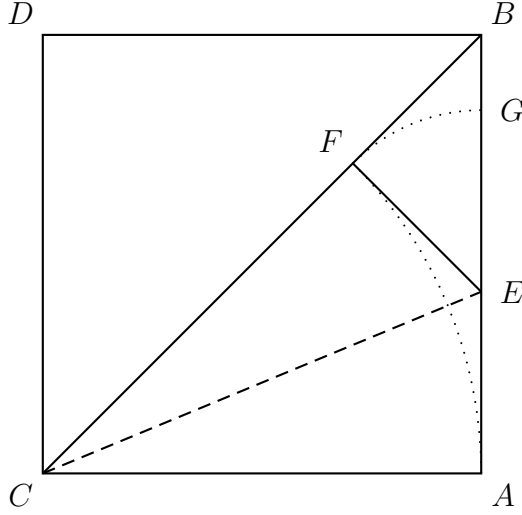
$$A > B, \quad A < B, \quad A = B$$

ifadelerini yazarız.

Arşimet Aksiyomu sayesinde cinsi aynı olan büyükliklerin antifiretik dizisi vardır. Eğer $A > B$ ve $\Gamma > \Delta$ ise, ve ayrıca $\{A, B\}$ ve $\{\Gamma, \Delta\}$ 'nin antifiretik dizisi ortak ise, o zaman eski bir tanıma göre

$$A : B :: \Gamma : \Delta.$$

Bu tanım, sayıların orantılılığının tanımı ile aynıdır. Bununla birlikte, bazı büyükliklerin antifiretik dizisi vardır ama sonsuzdur, dolayısıyla büyükliklerin ortak ölçüsü yoktur. Belki



Şekil 13: Bir kare

bu sebeple büyüklükler için Öklid'in verdiği orantılılık tanımını, karşılıklı çıkarmayı kullanmaz. Ayrıca karşılıklı çıkarmalı tanım ile, iki oranın karşılaştırılması kolay değildir!

Bir örneğe bakalım. Bir karenin köşegeninin ve kenarının antifiretik dizisi,

$$(1, 2, 2, 2, \dots).$$

Zira Şekil 13'teki $ABDC$ karesinde

$$CF = CA, \quad FE \perp CB, \quad EG = EF$$

olsun. O zaman FBE üçgeninde B ve E köşelerindeki açılarının her biri, dik açının yarısıdır, dolayısıyla

$$EF = FB.$$

Ayrıca CAE ve CFE üçgenlerinde, Pisagor Teoremi sayesinde

$$AE = EF.$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned}CB &= CF + FB = CA + FB = AB + FB, \\AB &= AE + EG + GB = FB + FB + GB;\end{aligned}$$

kısaca

$$\begin{aligned}CB &= 1 \cdot AB + FB, \\AB &= 2 \cdot FB + GB.\end{aligned}$$

Şimdi (FB, GB) , (AB, FB) gibidir: her çiftte, birinci doğru bir karenin kenarıdır, ve ikinci doğru, aynı karenin köşegeninin ve kenarının farkısına eşittir. O zaman devam edebiliriz. A , F , ve G noktası, Şekil 14'teki gibi sırasıyla A_1 , A_2 , ve A_3 olsun. O zaman CB 'de öyle A_4 , A_6 , ... noktaları vardır, ve A_1B 'de öyle A_5 , A_7 , ... noktaları vardır, ki

$$A_1B > A_2B > A_3B > A_4B > A_5B > \dots$$

ve her durumda

$$A_nB = 2 \cdot A_{n+1}B + A_{n+2}B.$$

Bu şekilde Öklid Algoritması ile

$$\begin{aligned}CB &= 1 \cdot A_1B + A_2B, \\A_1B &= 2 \cdot A_2B + A_3B, \\A_2B &= 2 \cdot A_3B + A_4B, \\A_3B &= 2 \cdot A_4B + A_5B, \\&\dots\dots\dots\end{aligned}$$

hesabı çıkar, dolayısıyla CB 'nin ve A_1B 'nin antifiretik dizisi $(1, 2, 2, \dots)$. Bu şekilde herhangi karenin köşegeninin ve kenarının antifiretik dizisi $(1, 2, 2, \dots)$ olmalı. Böylece örneğin

$$CB : A_1B :: EB : A_2B.$$

Sayılar çarpılıp karşılaştırılabildiğinden, onların oranları da karşılaştırılabilir. Aslında sayılarda, eğer

$$a \cdot d < b \cdot c$$

ise, o zaman tanıma göre

$$a : b < c : d$$

olsun. Eğer ayrıca

$$c : d < e : f$$

ise, o zaman

$$c \cdot f < d \cdot e,$$

dolayısıyla

$$a \cdot d \cdot f < b \cdot c \cdot f < b \cdot d \cdot e,$$

$$a \cdot f < b \cdot e,$$

ve sonuç olarak

$$a : b < e : f.$$

Böylece oranların karşılaştırması geçişlidir.

Benzer şekilde rasgele A ve B büyüklüğü için

$$\ell \cdot A < k \cdot B$$

ise

$$A : B < k : \ell$$

olsun. Eğer A ve B'nin oramı varsa, ve Γ ve Δ 'nın farklı oramı varsa, o zaman öyle k ve ℓ sayısı vardır ki

$$A : B < k : \ell, \quad \Gamma : \Delta > k : \ell$$

veya

$$A : B > k : \ell, \quad \Gamma : \Delta < k : \ell.$$

Bunu göstereceğiz, ama önce örneğimize yine bakalım. Des-cartes gibi uzunluklar için küçük harfler kullanacağız [8]. Şekil 14'te CB 'nin uzunluğu a olsun, kısaca

$$AB = a.$$

Ayrıca

$$A_1 B = b$$

olsun. O zaman

$$A_2 B = a - b,$$

dolayısıyla

$$EB = b - (a - b) = 2b - a.$$

Şimdi

$$\begin{aligned} a_1 &= a, & b_1 &= b, \\ a_2 &= 2b - a, & b_2 &= a - b \end{aligned}$$

olsun, ve genelde

$$a_{n+1} = 2b_n - a_n, \quad b_{n+1} = a_n - b_n$$

olsun. O zaman

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Bu durumda, tümevarım ile,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix};$$

ayrıca öyle k_n ve ℓ_n sayma sayıları vardır ki

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^n = (-1)^n \begin{pmatrix} k_n & -2\ell_n \\ -\ell_n & k_n \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \ell_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k_{n+1} \\ \ell_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_n + 2\ell_n \\ k_n + \ell_n \end{pmatrix}.$$

Zira

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_n & -2\ell_n \\ -\ell_n & k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(k_n + 2\ell_n) & 2(k_n + \ell_n) \\ k_n + \ell_n & -(k_n + 2\ell_n) \end{pmatrix}.$$

Şimdi

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (-1)^n (k_n a - 2\ell_n b), \\ b_{n+1} &= (-1)^n (-\ell_n a + k_n b). \end{aligned}$$

Son eşitlikten

$$\begin{aligned} b_{2n+1} &= -\ell_{2n} a + k_{2n} b, \\ \ell_{2n} a + b_{2n+1} &= k_{2n} b, \\ \ell_{2n} a &< k_{2n} b, \end{aligned}$$

ve sonuç olarak

$$a : b < k_{2n} : \ell_{2n}.$$

Benzer bir şekilde

$$k_{2n+1} : \ell_{2n+1} < a : b.$$

Buradaki k_n ve ℓ_n sayılarının bazı değerleri, yukarıdadır.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
k_n	1	3	7	17	41	99	239	577
ℓ_n	1	2	5	12	29	70	169	408

Ayrıca

$$\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \frac{239}{169} < \frac{577}{408} < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}.$$

Genelde

$$\begin{aligned} \frac{k_{n+1}}{\ell_{n+1}} - \frac{k_n}{\ell_n} &= \frac{k_n + 2\ell_n}{k_n + \ell_n} - \frac{k_n}{\ell_n} \\ &= \frac{k_n\ell_n + 2\ell_n^2 - k_n^2 - k_n\ell_n}{(k_n + \ell_n)\ell_n} \\ &= \frac{2\ell_n^2 - k_n^2}{\ell_n\ell_{n+1}}, \end{aligned}$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned} \frac{k_{n+2}}{\ell_{n+2}} - \frac{k_{n+1}}{\ell_{n+1}} &= \frac{2\ell_{n+1}^2 - k_{n+1}^2}{\ell_{n+1}\ell_{n+2}} \\ &= \frac{2(k_n + \ell_n)^2 - (k_n + 2\ell_n)^2}{\ell_{n+1}\ell_{n+2}} \\ &= \frac{k_n^2 - 2\ell_n^2}{\ell_{n+1}\ell_{n+2}} \\ &= - \left(\frac{k_{n+1}}{\ell_{n+1}} - \frac{k_n}{\ell_n} \right) \cdot \frac{\ell_n\ell_{n+1}}{\ell_{n+1}\ell_{n+2}}. \end{aligned}$$

Aynı zamanda

$$\frac{k_2}{\ell_2} - \frac{k_1}{\ell_1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\ell_1\ell_2}$$

olduğundan, tümevarım ile her durumda

$$\frac{k_{n+1}}{\ell_{n+1}} - \frac{k_n}{\ell_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{\ell_n\ell_{n+1}}.$$

Bu farkların mutlak değerleri, azalan bir dizi oluşturur ve istediğimiz kadar küçük olabilir çünkü

$$\ell_1 = 1, \quad \ell_{n+1} = k_n + \ell_n > 2\ell_n,$$

dolayısıyla

$$\ell_{n+1} > 2^n.$$

Bunlardan dolayı

$$\frac{k_1}{\ell_1} < \frac{k_3}{\ell_3} < \dots < \frac{k_{2n-1}}{\ell_{2n-1}} < \frac{k_{2n}}{\ell_{2n}} < \dots < \frac{k_4}{\ell_4} < \frac{k_2}{\ell_2}$$

ve k_n/ℓ_n kesirli sayılarının gerçel limiti vardır. Bugün bu limite $\sqrt{2}$ denir.

Genelde $a_0, a_1, a_2, \dots$, sayma sayısı olsun. Tanıma göre

$$\begin{aligned} [a_0] &= a_0, \\ [a_0; a_1] &= a_0 + \frac{1}{a_1}, \\ [a_0; a_1, a_2] &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \\ [a_0; a_1, a_2, a_3] &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}}, \\ &\dots \end{aligned}$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned} [a_0] &< [a_0; a_1], \\ [a_0] &< [a_0; a_1, a_2] < [a_0; a_1], \\ [a_0] &< [a_0; a_1, a_2] < [a_0; a_1, a_2, a_3] < [a_0; a_1], \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

ve hep beraber

$$\begin{aligned} [a_0] &< [a_0; a_1, a_2] < [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4] < \dots \\ \dots &< [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] < [a_0; a_1, a_2, a_3] < [a_0; a_1]. \end{aligned}$$

Ashında $b_{2k} < c_{2k}$ ise

$$\begin{aligned} &[a_0; a_1, \dots, a_{2k-1}, b_{2k}, b_{2k+1}, \dots] \\ &< [a_0; a_1, \dots, a_{2k-1}, c_{2k}] \\ &< [a_0; a_1, \dots, a_{2k-1}, c_{2k}, c_{2k+1}, \dots], \end{aligned}$$

ve benzer şekilde $b_{2k+1} < c_{2k+1}$ ise

$$\begin{aligned} &[a_0; a_1, \dots, a_{2k}, b_{2k+1}, b_{2k+2}, \dots] \\ &> [a_0; a_1, \dots, a_{2k}, c_{2k+1}] \\ &> [a_0; a_1, \dots, a_{2k}, c_{2k+1}, c_{2k+2}, \dots]. \end{aligned}$$

Öyleyse eğer

- A ve B'nin antifiretik dizisi $(a_0, \dots, a_n, b, \dots)$,
- Γ ve Δ 'nın antifiretik dizisi $(a_0, \dots, a_n, c, \dots)$,
- $b < c$, ve

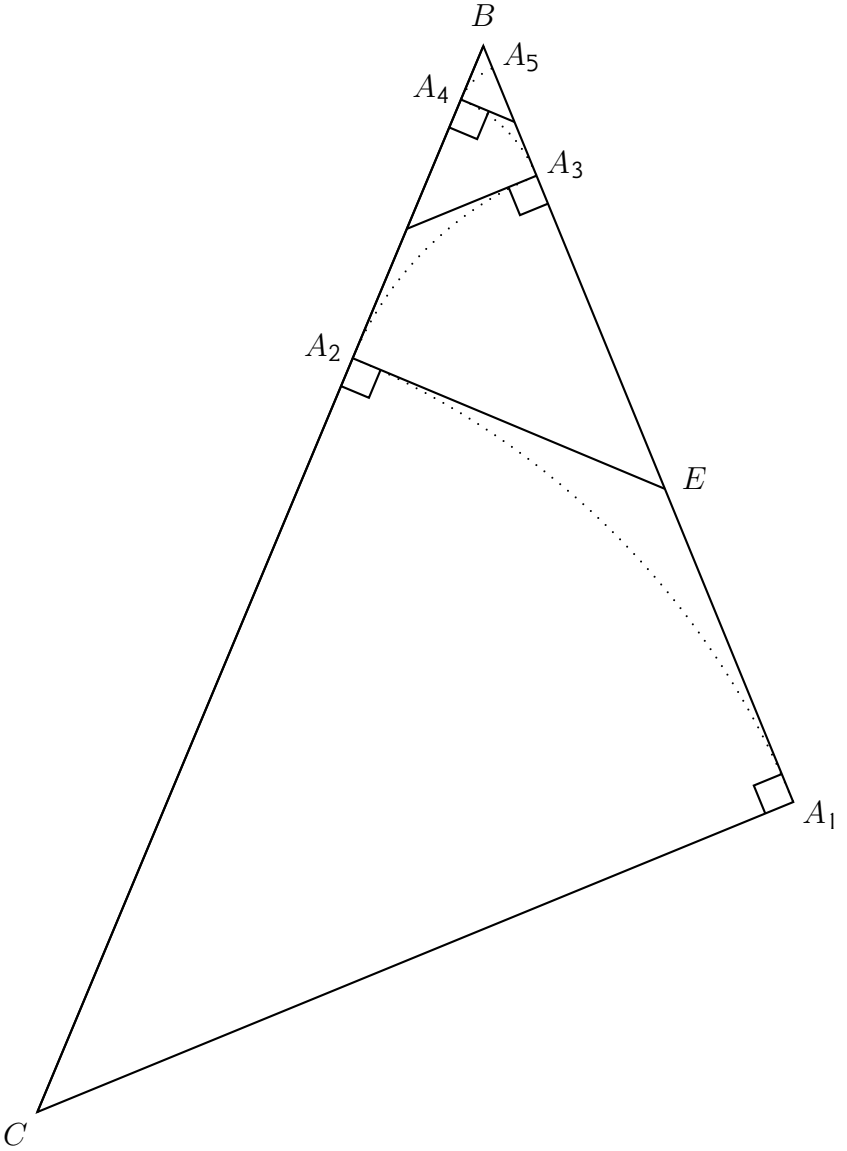
$$[a_0; a_1, \dots, a_n, c] = \frac{p}{q}$$

ise, o zaman istediğimiz gibi

$$A : B < p : q < \Gamma : \Delta$$

veya

$$A : B > p : q > \Gamma : \Delta.$$



Şekil 14: Bir karenin yarısı

Thales, Pappus, ve Desargues

Giriş’te dediğimiz gibi, Pappus sık sık Şekil 15’teki Thales Teoremi’ni kullanır. Lemma VIII bir istisnadır. Bu lemmaya göre, eğer $ABCDEF$ altıgeninde, Şekil 16’da gibi

$$AB \parallel DE, \quad BC \parallel EF$$

ise, o zaman

$$CD \parallel FA.$$

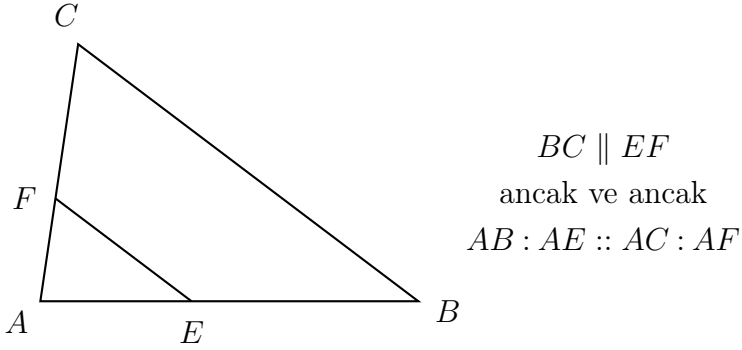
Bu bölümde bu lemmaya, **Pappus Teoremi** diyelim. Bu teorem sayesinde, Arşimet Aksiyomu’nu kullanmadan, orantılılığı tanımlayabiliriz. İki yöntem vardır.

1. Tanım olarak Thales Teoremi’ni kullanabiliriz. Bu durumda $::$ “oranı aynı olma” bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğu açık değildir. Bağıntının simetrik olduğu açıktır, ama geçişli olduğunu göstermek için çalışmak zorundayız.
2. Çarpma ile “oranı aynı olma” bağıntısını tanımlayabiliriz. Bu durumda yine Thales Teoremi’ni kanıtlamak zorundayız.

Çarpma ile başlayalım. Sayılarda, çarpmanın değişmeli olduğunu gösterdikten sonra,

$$a : b :: c : d \quad \text{ancak ve ancak} \quad a \cdot d = b \cdot c$$

denkliğini kanıtladık. Bunu, $::$ bağıntısının tanımı olarak alırsak, bağıntının geçişli olduğunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz.



Şekil 15: Thales Teoremi

Eğer

$$a : b :: c : d, \quad c : d :: e : f$$

ise, o zaman

$$a \cdot d = b \cdot c, \quad c \cdot f = d \cdot e,$$

dolayısıyla

$$a \cdot d \cdot f = b \cdot c \cdot f, \quad b \cdot c \cdot f = b \cdot d \cdot e,$$

ve (eşitlik geçişli olduğundan)

$$a \cdot d \cdot f = b \cdot d \cdot e,$$

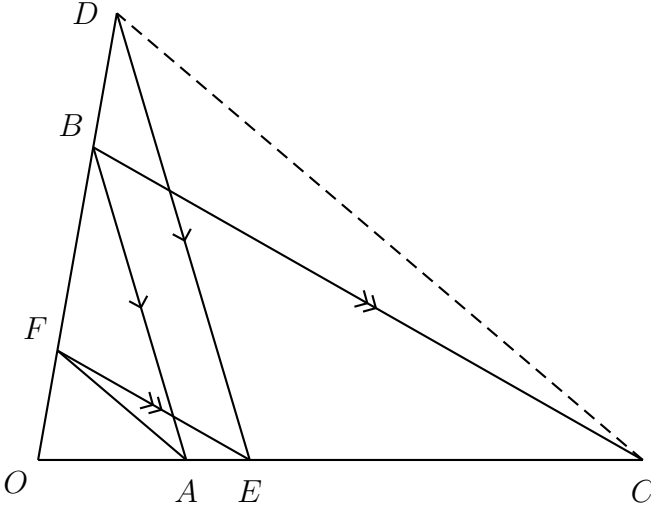
ve sonuç olarak

$$a \cdot f = b \cdot e,$$

yani

$$a : b :: e : f.$$

Sayıların yerine uzunluklar kullanarak aynı şey yapabiliriz, ama burada



Şekil 16: Pappus Teoremi

- Giriş'te dediğimiz gibi iki uzunluğun çarpımı bir alandır;
- üç uzunluğun çarpımı bir hacim olur.

Alan ve hacim kullanmak istemezsek, 1637 yılında René Descartes'in yaptığı gibi [8], ve 1899 yılında David Hilbert'in daha ayrıntılı bir şekilde yaptığı gibi [14], birim olarak bir uzunluk seçerek, Şekil 17'deki gibi iki uzunluğun çarpımını yeni bir uzunluk olarak tanımlayabiliriz. Descartes çarpmasının değişmeli ve birleşmeli olduğu, Pappus Teoremi'nden çıkar. Şekil 16'da, eğer

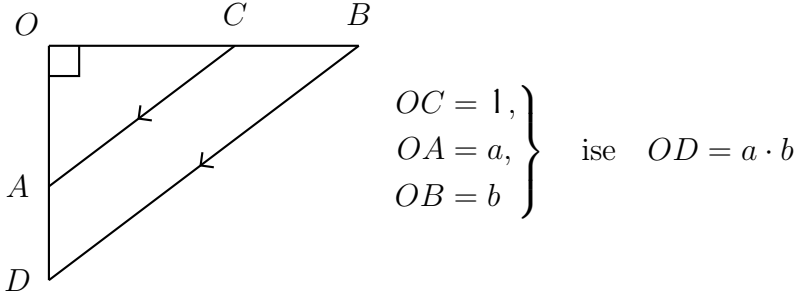
$$OA = OF$$

ise, o zaman $\angle OAF = \angle OFA$, dolayısıyla

$$\angle OCD = \angle OAF = \angle OFA = \angle ODC,$$

ve sonuç olarak

$$OC = OD.$$



Şekil 17: Descartes çarpması

Şimdi ayrıca O 'daki açı dik olsun. Eğer

$$OA = OF = 1, \quad OE = a, \quad OB = b$$

ise, o zaman

$$OC = a \cdot b, \quad OD = b \cdot a,$$

dolayısıyla

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Bu şekilde Descartes çarpması değişmelidir. Eğer Şekil 16'da

$$OA = OF = c, \quad OE = a \cdot c, \quad OB = b \cdot c$$

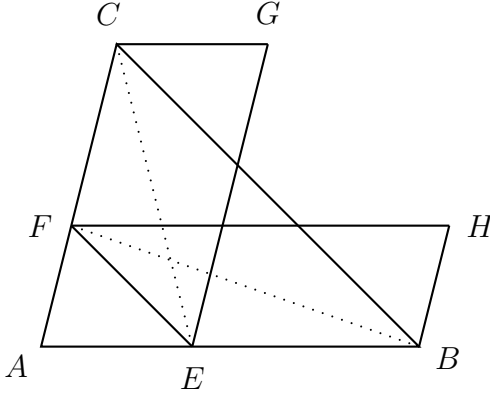
ise, o zaman

$$OC = a \cdot (b \cdot c), \quad OD = b \cdot (a \cdot c),$$

dolayısıyla

$$a \cdot (c \cdot b) = a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot c) = (a \cdot c) \cdot b.$$

Böylece Descartes çarpması birleşmelidir.



Şekil 18: Thales Teoremi için birinci adım

Orantılılık için yeni tanımımız ile Thales Teoremi'ni kanıtlayalım. Şekil 18'de,

$$BC \parallel EF \quad \text{ancak ve ancak} \quad AG = AH;$$

burada AG 'nin anlamı, $AEGC$ paralelkenardır, ve aynı şekilde AH , $ABHF$ paralelkenardır. Ayrıntılar, [20] makalemindedir. Şekil 19'u kullanarak

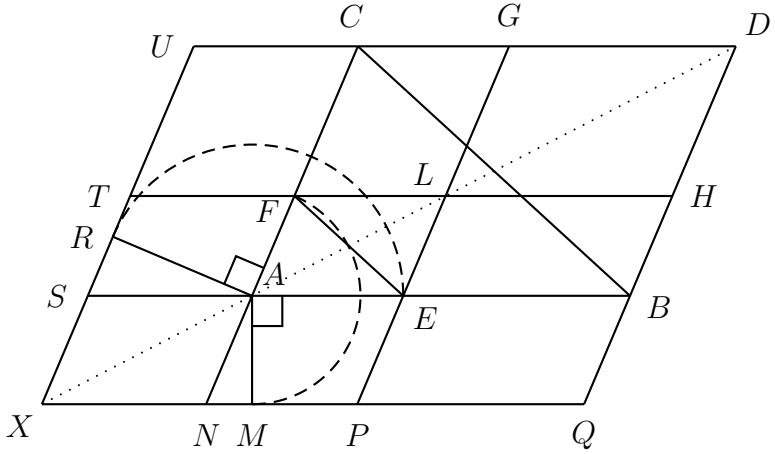
$$AG = AH \quad \text{ancak ve ancak} \quad AB \cdot AF = AE \cdot AC.$$

denkliğini gösterebiliriz. Yeni tanımımız ile

$$AE \cdot AC = AB \cdot AF \quad \text{ancak ve ancak} \quad AB : AE :: AC : AF.$$

Son üç denklikten Thales Teoremi çıkar.

Şimdi, orantılılığın tanımı olarak Thales Teoremi'ni kabul ederek “oranı aynı olma” bağıntısının geçişli olduğunu göstereceğiz. Bu geçişlilik, **Desargues Teoremi** ile denktir [7]. Bu teoreme göre, Şekil 20'de, eğer



Şekil 19: Thales Teoremi için ikinci adım

$$AB \parallel DE,$$

$$AC \parallel DF,$$

ise, o zaman

$$BC \parallel EF.$$

Üç kere Pappus Teoremi'ni kullanarak 1905 yılında Gerhard Hessenberg, Desargues Teoremi'ni kanıtladı [13]. Şekil 21'de,

$$AB \parallel DE,$$

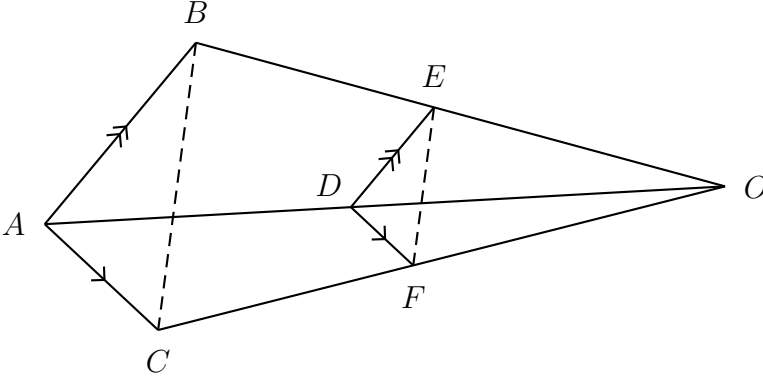
$$AC \parallel DF$$

varsayılır. Eğer ayrıca

$$OB \nparallel AC$$

ise, D noktasından geçen ve LM doğrusuna paralel olan OB çizeriz ve diyagramı tamamlarız. Pappus Teoremi ile

- $ONDLAE$ altıgeninde $ON \parallel AL$,
- $ONMLCB$ altıgeninde $BC \parallel MN$,
- $ONMDFE$ altıgeninde $EF \parallel MN$.

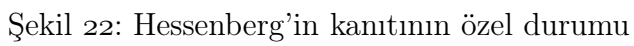


Şekil 20: Desargues Teoremi

Paralellik geçişli olduğundan

$$BC \parallel EF.$$

Kalan durumda Şekil 22'deki gibi $ABOC$ bir paralelkenardır. Bu durumda OB 'de öyle bir E' vardır ki $FE' \parallel CB$. İlk durumdan $DE' \parallel AB$, dolayısıyla E' noktası zaten E 'dir.



Öklid'in *Porizmalar*'ı için
Derleme'nin
VII. Kitabının
38 Lemmasından
İlk 19 Lemması

Lemma I (Önerme 127)

193. Diyagram $AB\Gamma\Delta EZH$ olsun, ve

$$AZ : ZH :: A\Delta : \Delta\Gamma$$

olsun, ve ΘK birleştirilmiş olsun. O zaman

$$\Theta K \parallel A\Gamma.$$

Kanıt. Z'dan $B\Delta$ 'ya paralel olan $Z\Lambda$ ilerletilmiş olsun. Dolayısıyla

$$AZ : ZH :: A\Delta : \Delta\Gamma$$

olduğundan tersine ve toplamayla ve izlemeyle (ve paralellerden)

$$\underbrace{\Delta A : AZ}_{BA : A\Lambda} :: \Gamma A : AH.$$

Böylece

$$\Lambda H \parallel B\Gamma.$$

Böylece (paralellerden)

$$EB : B\Lambda :: \begin{cases} EK : KZ \\ E\Theta : \Theta H. \end{cases}$$

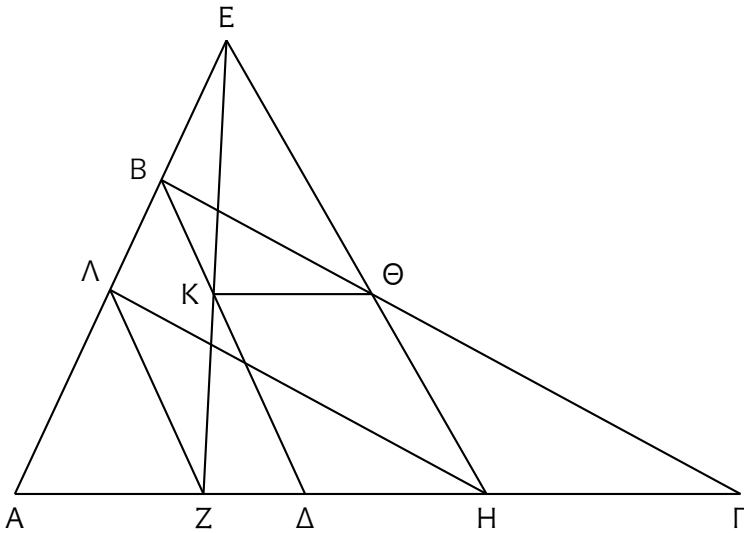
Böylece

$$EK : KZ :: E\Theta : \Theta H.$$

Böylece

$$\Theta K \parallel A\Gamma.$$

□



194. *Bileşik oranları kullanan kanıt.*

$$AZ : ZH :: A\Delta : \Delta\Gamma$$

olduğundan, tersine

$$HZ : ZA :: \Gamma\Delta : \Delta A.$$

Toplamayla ve izlemeyle ve çevirmeyle

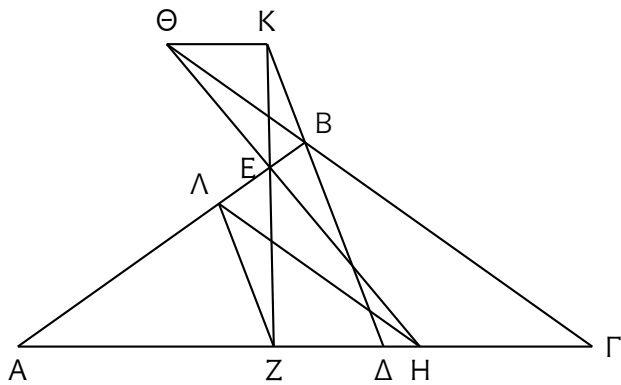
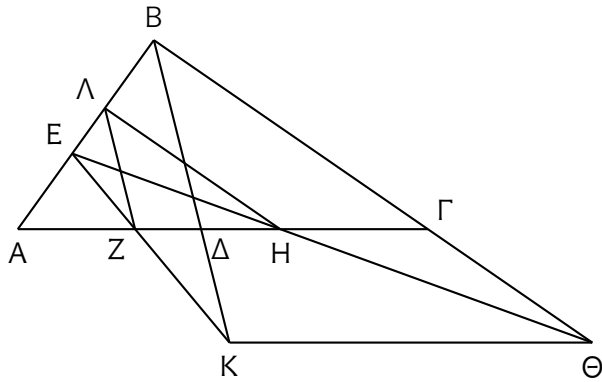
$$A\Delta : \Delta Z :: A\Gamma : \Gamma H.$$

Ama

$$A\Delta : \Delta Z :: (AB : BE)(E\Theta : \Theta H),$$

böylece

$$(AB : BE)(EK : KZ) :: (AB : BE)(E\Theta : \Theta H).$$



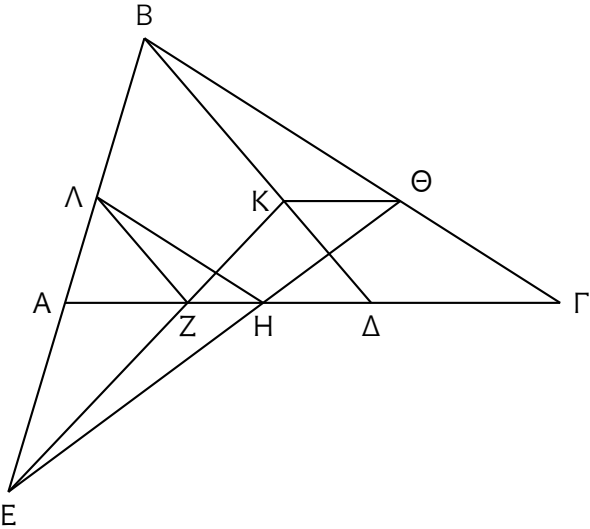
Ortak AB : BE oranı kovulmuş olsun. Böylece kalan

$$EK : KZ :: E\Theta : \Theta H.$$

Böylece

$$\Theta K \parallel A\Gamma.$$





Lemma II (Önerme 128)

195. Diyagram $AB\Gamma\Delta EZH\Theta$ [olsun], ve AZ ΔB 'ya paralel olsun, ve

$$AE : EZ :: \Gamma H : HZ$$

[olsun]. O zaman

Θ , K , ve Z 'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt. H 'dan ΔE boyunca $H\Lambda$ ilerletilmiş olsun, ve birleştirilmiş olan ΘK Λ 'ya uzatılmış olsun.

$$AE : EZ :: \Gamma H : HZ$$

olduğundan, izlemeyle

$$AE : \Gamma H :: EZ : ZH.$$

Ayrıca

$$AE : \Gamma H :: E\Theta : H\Lambda$$

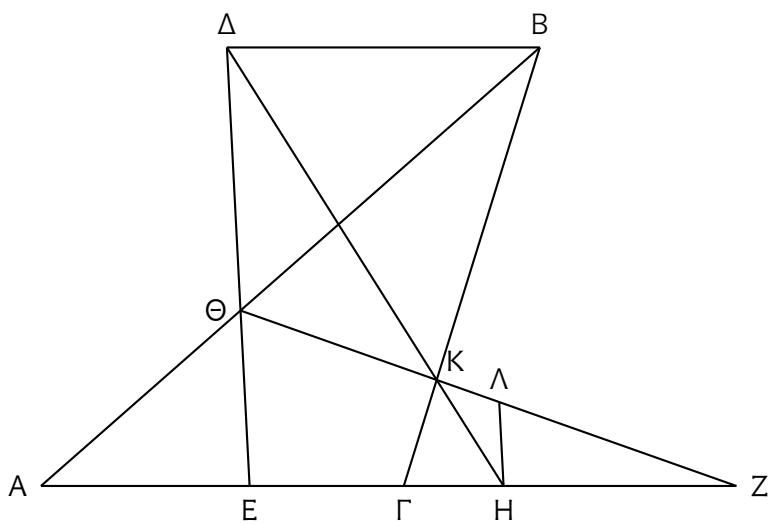
(çünkü iki doğru iki doğruya paralel, ve izlemeyle). Böylece

$$EZ : ZH :: E\Theta : H\Lambda.$$

Ayrıca $E\Theta$ $H\Lambda$ 'ya paraleldir. Böylece

Θ , Λ , Z 'dan [geçen çizgi] doğrudur,

yani Θ , K , Z 'dan. □



Lemma III (Önerme 129)

196. Üç doğru AB, ΓA, ve ΔA üzerine iki doğru ΘE ve ΘΔ sürdürülmüş olsun. O zaman

$$\Theta E \cdot HZ : \Theta H \cdot ZE :: \Theta B \cdot \Delta \Gamma : \Theta \Delta \cdot B\Gamma.$$

Kanıt.

- Θ'dan geçen ve ZΓA'ya paralel olan KΛ ilerletilmiş olsun, ve ΔA ve AB bununla kesişmiş olsun K ve Λ noktalarında;
- Λ'dan da geçen ve ΔA'ya paralel olan ΛM de [ilerletilmiş olsun], ve EΘ ile kesişmiş olsun M'de.

Dolayısıyla,

$$EZ : ZA :: E\Theta : \Theta\Lambda,$$

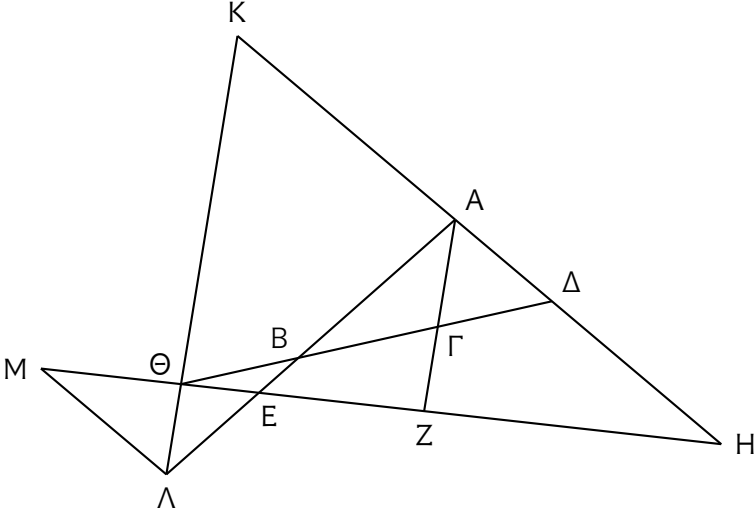
$$AZ : ZH :: \Theta\Lambda : \Theta M$$

(çünkü ikisi, ΘK : ΘH ile aynı, paralellerden), [ve bunlar] olduğundan, böylece eşitlikten

$$EZ : ZH :: E\Theta : \Theta M.$$

Böylece

$$\Theta E \cdot HZ = EZ \cdot \Theta M.$$



$EZ \cdot \Theta H$ da başka rasgele bir [çarpımdır]. Böylece

$$\begin{aligned} E\Theta \cdot HZ : EZ \cdot H\Theta &:: EZ \cdot \Theta M : EZ \cdot H\Theta \\ &:: \Theta M : \Theta H \\ &:: \Lambda\Theta : \Theta K. \end{aligned}$$

Aynı [şekil]de

$$K\Theta : \Theta\Lambda :: \Theta\Delta \cdot B\Gamma : \Theta B \cdot \Gamma\Delta.$$

Böylece tersine

$$\Lambda\Theta : \Theta K :: \Theta B \cdot \Gamma\Delta : \Theta\Delta \cdot B\Gamma.$$

Ve

$$\Lambda\Theta \cdot \Theta K :: E\Theta \cdot HZ : EZ \cdot H\Theta$$

gösterilmiş oldu. Ve böylece

$$E\Theta \cdot HZ : EZ \cdot H\Theta :: \Theta B \cdot \Gamma\Delta : \Theta\Delta \cdot B\Gamma. \quad \square$$

197. Bileşik oranları kullanan kanıt.

$$\begin{aligned}\Theta E \cdot HZ : \Theta H \cdot ZE &:: (\Theta E : EZ)(ZH : H\Theta), \\ \Theta E : EZ &:: \Theta\Lambda : ZA, \\ ZH : H\Theta &:: ZA : \Theta K\end{aligned}$$

olduğundan, böylece

$$\Theta E \cdot HZ : \Theta H \cdot EZ :: (\Theta\Lambda : ZA)(ZA : \Theta K).$$

Ayrıca

$$(\Theta\Lambda : ZA)(ZA : \Theta K) :: \Theta\Lambda : \Theta K.$$

Böylece

$$\Theta E \cdot HZ : \Theta H \cdot ZE :: \Theta\Lambda : \Theta K.$$

Aynı [sebepler]le

$$\Theta\Delta \cdot B\Gamma : \Theta B \cdot \Gamma\Delta :: \Theta K : \Theta\Lambda.$$

Ve tersine

$$\Theta B \cdot \Gamma\Delta : \Theta\Delta \cdot B\Gamma :: \Theta\Lambda : \Theta K.$$

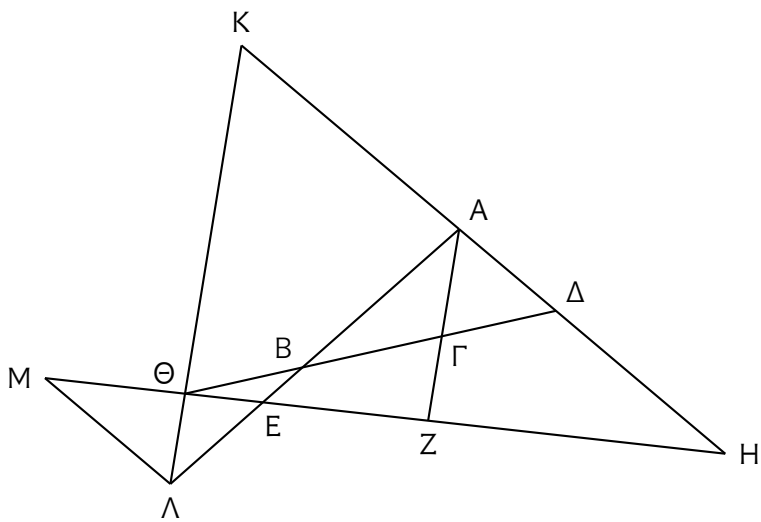
Ama

$$\Theta E \cdot ZH : \Theta H \cdot ZE :: \Theta\Lambda : \Theta K$$

oldu. Ve böylece

$$\Theta E \cdot ZH : \Theta H \cdot ZE :: \Theta B \cdot \Gamma\Delta : \Theta\Delta \cdot B\Gamma.$$

□



Lemma IV (Önerme 130)

198. Diyagram $AB\Gamma\Delta EZH\Theta K\Lambda$ [olsun], ve

$$AZ \cdot B\Gamma : AB \cdot \Gamma Z :: AZ \cdot \Delta E : A\Delta \cdot EZ$$

olsun. O zaman

Θ , H , ve Z noktalarından [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt. $AZ \cdot B\Gamma : AB \cdot \Gamma Z :: AZ \cdot \Delta E : A\Delta \cdot EZ$ olduğundan izlemeyle

$$\underbrace{AZ \cdot B\Gamma : AZ \cdot \Delta E}_{B\Gamma : \Delta E} :: AB \cdot \Gamma Z : A\Delta \cdot EZ.$$

Ama (eğer K 'dan AZ 'ya paralel olan KM ilerletilmiş ise)

$$\begin{aligned} B\Gamma : \Delta E &:: (B\Gamma : KN)(KN : KM)(KM : \Delta E), \\ AB \cdot \Gamma Z : A\Delta \cdot EZ &:: (BA : A\Delta)(\Gamma Z : ZE). \end{aligned}$$

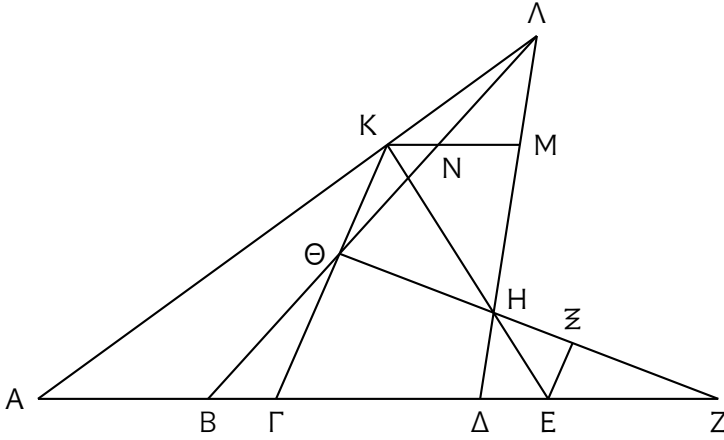
$NK : KM$ ile aynı olan ortak $BA : A\Delta$ kovulmuş olsun, Böylece

$$\text{kalan } \Gamma Z : ZE :: (\underbrace{B\Gamma : KN}_{\Theta\Gamma : K\Theta})(\underbrace{KM : \Delta E}_{KH : HE}).$$

Böylece

Θ , H , ve Z 'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Zira eğer E 'dan $\Theta\Gamma$ 'ya paralel olan EZ 'yi ilerlersem, ve birleştirilmiş olan ΘH Z 'ye uzatılmış olursa,



- $KH : HE :: K\Theta : EZ$,
- $(\Gamma\Theta : \Theta K)(\Theta K : EZ)$ bileşimi $\Theta\Gamma : EZ$ oranıyla değiştirilir,
ve

$$\Gamma Z : ZE :: \Gamma\Theta : EZ.$$

$\Gamma\Theta$ EZ 'ye paralel olunca, böylece

Θ , Z , ve Z 'dan [geçen çizgi] doğrudur

(zira bu apaçıktır), öyleyse ayrıca

Θ , H , ve Z 'dan [geçen çizgi] doğrudur. $\square$

Lemma V (Önerme 131)

199. Eğer diyagram $AB\Gamma\Delta EZH\Theta$ ise [ve özel olarak A, H, ve Θ 'dan geçen çizgi doğru ise],

$$A\Delta : \Delta\Gamma :: AB : B\Gamma$$

meydana gelir. Dolayısıyla $A\Delta : \Delta\Gamma :: AB : B\Gamma$ olsun. O zaman

A, H, ve Θ 'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt. H'dan $A\Delta$ 'ya paralel olan $K\Lambda$ ilerletilmiş olsun. Dolayısıyla

$$A\Delta : \Delta\Gamma :: AB : B\Gamma$$

olduğundan, ama

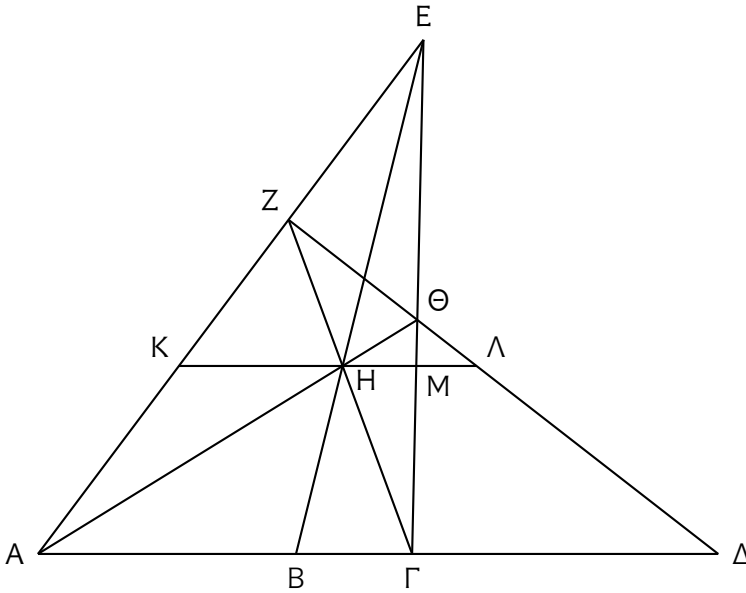
$$\begin{aligned} A\Delta : \Delta\Gamma &:: K\Lambda : \Lambda H, \\ AB : B\Gamma &:: KH : HM \end{aligned}$$

olduğundan, böylece ayrıca

$$K\Lambda : \Lambda H :: KH : HM,$$

ve

$$\begin{aligned} \text{kalan } H\Lambda : \text{kalan } \Lambda M &:: K\Lambda : \Lambda H \\ &:: A\Delta : \Delta\Gamma. \end{aligned}$$



İzlemeyle

$$\begin{aligned} A\Delta : H\Lambda &:: \Gamma\Delta : \Lambda M \\ &:: \Delta\Theta : \Theta\Lambda, \end{aligned}$$

ve $HA \parallel AD'$ 'ya paraleldir. Böylece

A, H, ve Θ noktalarından [geçen çizgi] doğrudur;

zira bu apaçıktır.



Lemma VI (Önerme 132)

200. Yine eğer diyagram $[AB\Gamma\Delta EZH]$ ise, ve ΔZ $B\Gamma$ 'ya paralel ise,

$$AB = B\Gamma$$

meydana gelir. Dolayısıyla eşit olsun; o zaman

$$[\Delta Z \ B\Gamma\text{'ya}] \text{ paraleldir.}$$

Kanıt. Olur da. Zira eğer EB 'da HB 'ya eşit olan $B\Theta$ 'yı koyarsam, ve $A\Theta$ ve $\Theta\Gamma$ 'yı birleştirirsem,

paralelkenar $A\Theta\Gamma H$ meydana gelir,

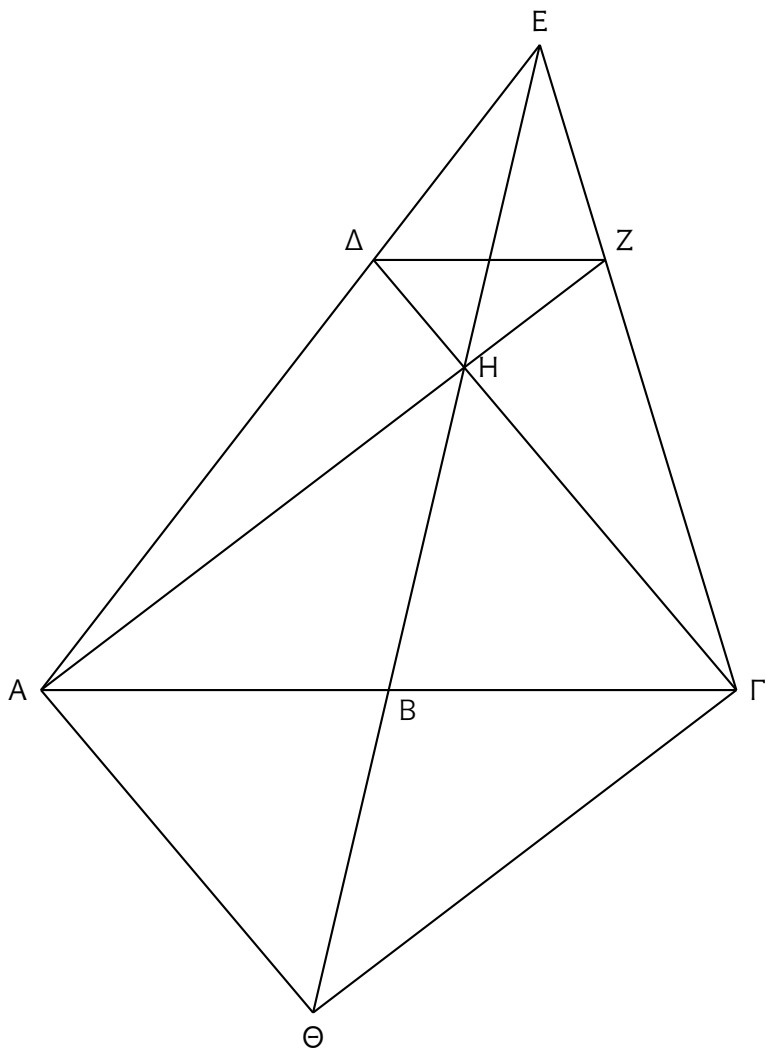
ve bundan

$$A\Delta : \Delta E :: \Gamma Z : ZE$$

(zira söylenmiş [iki oranın] her biri $\Theta H : HE$ oranıyla aynıdır).
Öyleyse

$$\Delta Z \parallel A\Gamma.$$

□



Lemma VII (Önerme 133)

201. Diyagram olsun, ve ΔB ve $B\Gamma$ 'nın orta orantılısı BA olsun ($\tau\omega\nu \Delta B B\Gamma \mu\acute{\epsilon}\sigma\eta \acute{\alpha}\nu\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu \xi\sigma\tau\omega \acute{\eta} BA$).¹ O zaman

$$ZH \parallel A\Gamma.$$

Kanıt. EB uzatılmış olsun, ve A 'dan ΔZ doğrusuna paralel olan AK ilerletilmiş olsun, ve ΓK birleştirilmiş olsun. Dolayısıyla

$$\Gamma B : BA :: AB : B\Delta,$$

$$AB : B\Delta :: KB : B\Theta$$

olduğundan, ayrıca

$$\Gamma B : BA :: KB : B\Theta.$$

Böylece

$$A\Theta \parallel K\Gamma.$$

Dolayısıyla yine

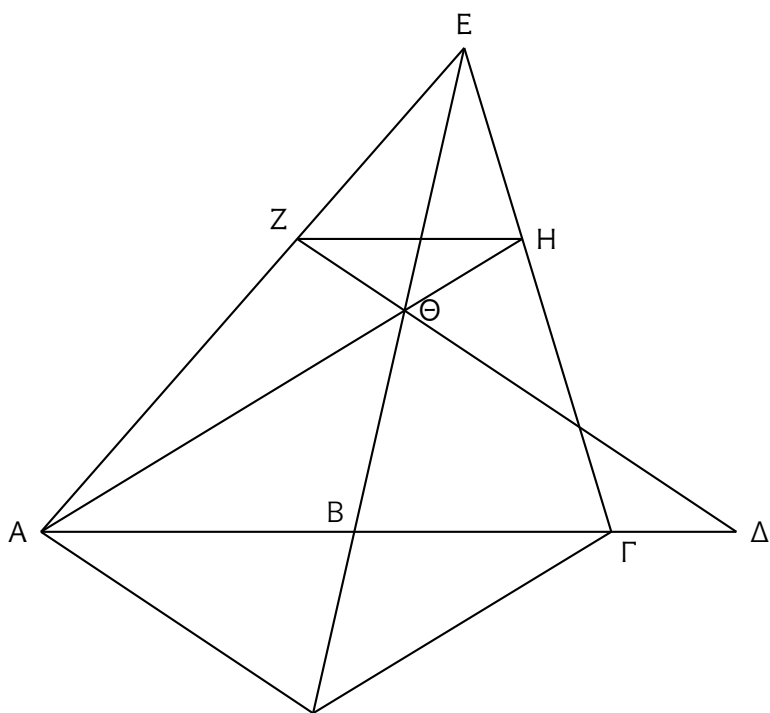
$$AZ : ZE :: \Gamma H : HE$$

(zira her oran $K\Theta : \Theta E$ oranıyla aynıdır). Öyleyse

$$ZH \parallel A\Gamma.$$

□

¹Yani $\Delta B : BA :: BA : B\Gamma$ olsun. *Öğeler* Önerme VI.13'üne bakın. Yunan $\acute{\eta} \mu\acute{\epsilon}\sigma\eta \acute{\alpha}\nu\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$ teriminin İngilizcesi *mean proportional*'dır, örneğin lisede kullandığım geometri ders kitabında [28, s. 239]. Türkçe'de Demirtaş “orta orantılı” kullanır [5, s. 214], ama Atatürk “ortakoran” kullandı [2, s. 35].



Lemma VIII (Önerme 134)

202. Diyagram (ó βωμόςκος “küçük sunak”) $AB\Gamma\Delta EZH$ olsun, ve

ΔE $B\Gamma$ 'ya, ve EH BZ 'ya, paralel olsun.

O zaman

$\Delta Z \parallel \Gamma H$ da.

Kanıt. BE , $\Delta\Gamma$, ve ZH birleştirmiş olsun. Böylece

ΔBE üçgeni $\Delta\Gamma E$ üçgenine eşittir.

Ortak ΔAE üçgeni eklenmiş olsun. Böylece

ABE üçgeninin tümü, $\Gamma\Delta A$ üçgeninin tümüne eşittir.

Yine BZ EH 'ya paralel olduğundan

BZE üçgeni BZH üçgenine eşittir.

Ortak ABZ üçgeni ayrılmış olsun. Böylece

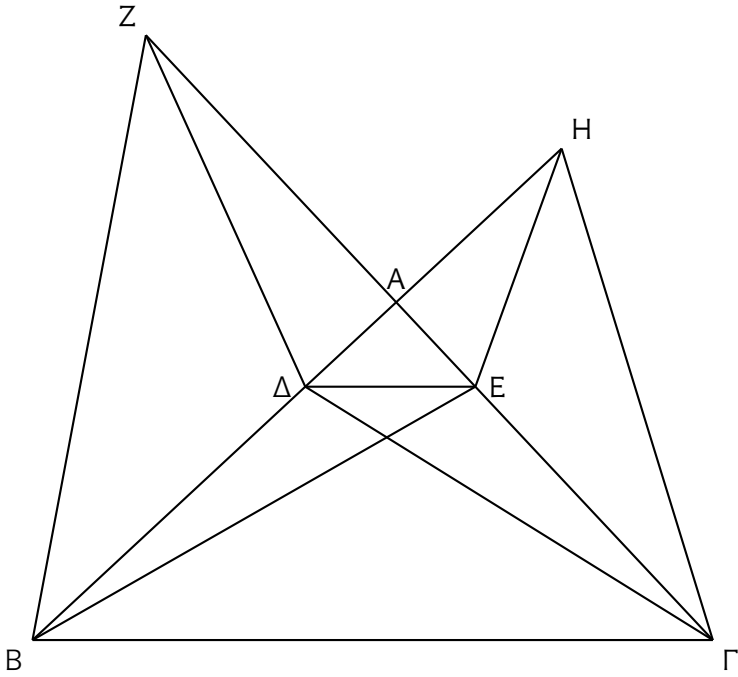
kalan ABE üçgeni, kalan AHZ üçgenine eşittir.

Ama

ABE üçgeni $A\Gamma\Delta$ üçgenine eşittir.

Böylece

$A\Gamma\Delta$ üçgeni de, AHZ üçgenine eşittir.



Ortak AΓH üçgeni eklenmiş olsun. Böylece

$\Gamma\Delta H$ üçgeninin tümü, ΓZH üçgeninin tümüne eşittir.

Ve aynı ΓH tabanındadırlar. Böylece

$$\Gamma H \parallel \Delta Z.$$

□

Lemma IX (Önerme 135)

203. Üçgen $AB\Gamma$ olsun, ve orada $A\Delta$ ve AE sürdürülmüş olsun, ve $B\Gamma$ 'ya paralel olan ZH ilerletilmiş olsun, ve $Z\Theta H$ eğilmiş olsun, ve

$$B\Theta : \Theta\Gamma :: \Delta\Theta : \Theta E$$

olsun. O zaman

$$K\Lambda \parallel B\Gamma.$$

Kanıt. Zira

$$B\Theta : \Theta\Gamma :: \Delta\Theta : \Theta E$$

olduğundan, böylece

$$\text{kalan } BD : \text{kalan } GE :: \Delta\Theta : \Theta E.$$

Ve

$$B\Delta : E\Gamma :: ZM : NH;$$

böylece ayrıca

$$ZM : NH :: \Delta\Theta : \Theta E.$$

İzlemeyle

$$ZM : \Delta\Theta :: NH : \Theta E.$$

Ama paralellerden

$$\begin{aligned} ZM : \Delta\Theta &:: ZK : K\Theta, \\ HN : \Theta E &:: H\Lambda : \Lambda\Theta, \end{aligned}$$

Lemma X (Önerme 136)

204. İki doğru BAE ve ΔAH üzerine, Θ noktasından geçen iki doğru ΔΘ ve ΘE sürdürülmüş olsun, ve

$$\Delta\Theta \cdot B\Gamma : \Delta\Gamma \cdot B\Theta :: \Theta H \cdot ZE : \Theta E \cdot ZH$$

olsun. O zaman

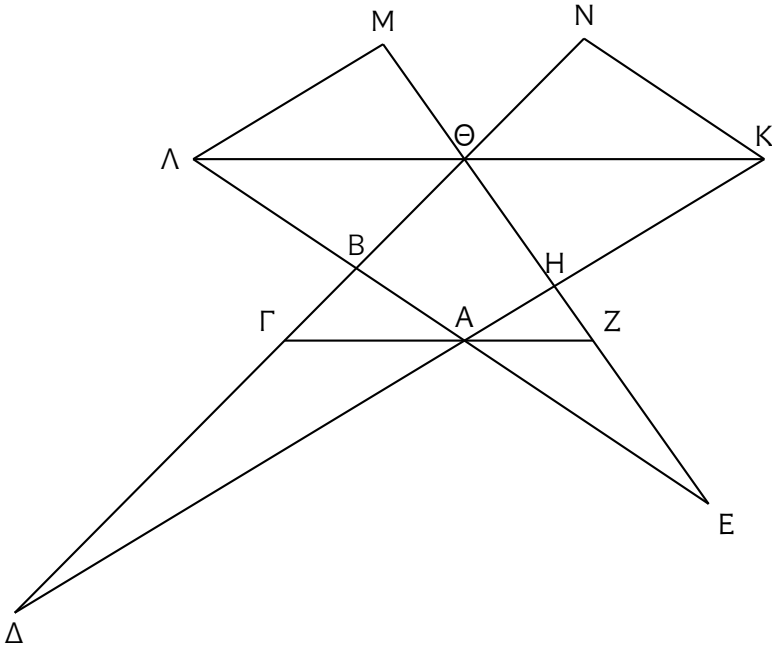
Γ, A, ve Z'dan geçen [çizgi] doğrudur.

Kanıt.

- Θ'dan ve ΓA'ya paralel olan KΛ ilerletilmiş olsun,
- AB ve AΔ ile K ve Λ noktalarında kesişmiş olsun,
- Λ'dan AΔ'ya paralel olan ΛM ilerletilmiş olsun,
- EΘ M'ye uzatılmış olsun,
- K'dan AB'ya paralel olan KN ilerletilmiş olsun,
- ΔΘ N'ye uzatılmış olsun.

Dolayısıyla paralellerden

$$\Delta\Theta : \Theta N :: \Delta\Gamma : \Gamma B$$



olmuş olduğundan, böylece

$$\Delta\Theta \cdot \Gamma B = \Delta\Gamma \cdot \Theta N.$$

$\Delta\Gamma \cdot B\Theta$ da başka rasgele bir [çarpımdır]. Böylece

$$\Delta\Theta \cdot \text{B}\Gamma : \Delta\Gamma \cdot \text{B}\Theta :: \Gamma\Delta \cdot \Theta\text{N} : \Delta\Gamma \cdot \text{B}\Theta \\ :: \Theta\text{N} : \Theta\text{B}.$$

Ama

$$\Theta\Delta \cdot \text{B}\Gamma : \Delta\Gamma \cdot \text{B}\Theta :: \Theta\text{H} \cdot \text{Z}\text{E} : \Theta\text{E} \cdot \text{Z}\text{H}$$

varsayılır, ve

$$\begin{aligned} \Theta N : \Theta B &:: K\Theta : \Theta\Lambda \\ &:: H\Theta : \Theta M && (\text{parallellerden}) \\ &:: \Theta H \cdot ZE : \Theta M \cdot ZE. \end{aligned}$$

Ve böylece

$$\Theta H \cdot ZE : \Theta E \cdot ZH :: \Theta H \cdot ZE : \Theta M \cdot ZE.$$

Böylece

$$\Theta E \cdot ZH = \Theta M \cdot ZE.$$

Ve böylece

$$\Theta M : \Theta E :: HZ : ZE.$$

Toplamayla ve izlemeyle

$$ME : EH :: \Theta E : EZ.$$

Ama

$$ME : EH :: \Lambda E : EA,$$

ve böylece

$$\Lambda E : EA :: \Theta E : EZ.$$

Böylece

$$AZ \parallel K\Lambda.$$

Ama

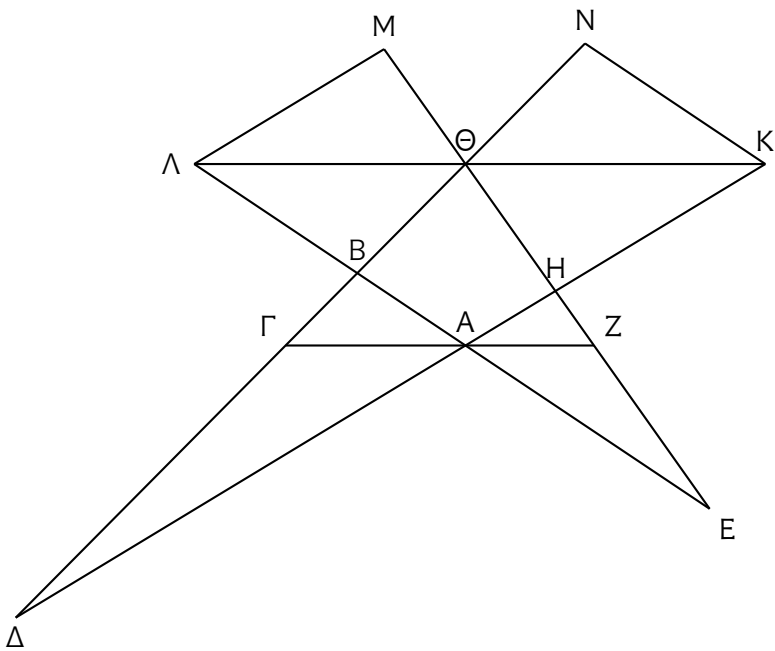
ΓA da $[K\Lambda$ 'ya paraleldir].

Böylece

ΓAZ doğrudur.

□

Bunun durumları, tersi olan önceden yazılmışları [yani Lemma III'ün durumları] gibidir.



Lemma XI (Önerme 137)

205. Üçgen $AB\Gamma$ [olsun], ve $A\Delta$ $B\Gamma$ 'ya paralel [olsun], ve sürdürülmüş olan ΔE , $B\Gamma$ ile E noktada kesişmiş olsun. O zaman

$$\Delta E \cdot ZH : EZ \cdot H\Delta :: \Gamma B : BE.$$

Kanıt. Γ 'dan AE 'a paralel olan $\Gamma\Theta$ ilerletilmiş olsun, ve AB Θ 'ya uzatılmış olsun. Dolayısıyla

$$\Gamma A : AH :: \Gamma\Theta : ZH,$$

$$\Gamma A : AH :: E\Delta : \Delta H$$

olduğundan, dahi

$$E\Delta : \Delta H :: \Theta\Gamma : ZH.$$

Böylece

$$\Gamma\Theta \cdot \Delta H = E\Delta \cdot ZH.$$

$EZ \cdot H\Delta$ da başka rasgele bir [çarpımdır]. Böylece

$$\Delta E \cdot ZH : \Delta H \cdot EZ :: \Gamma\Theta \cdot \Delta H : \Delta H \cdot EZ$$

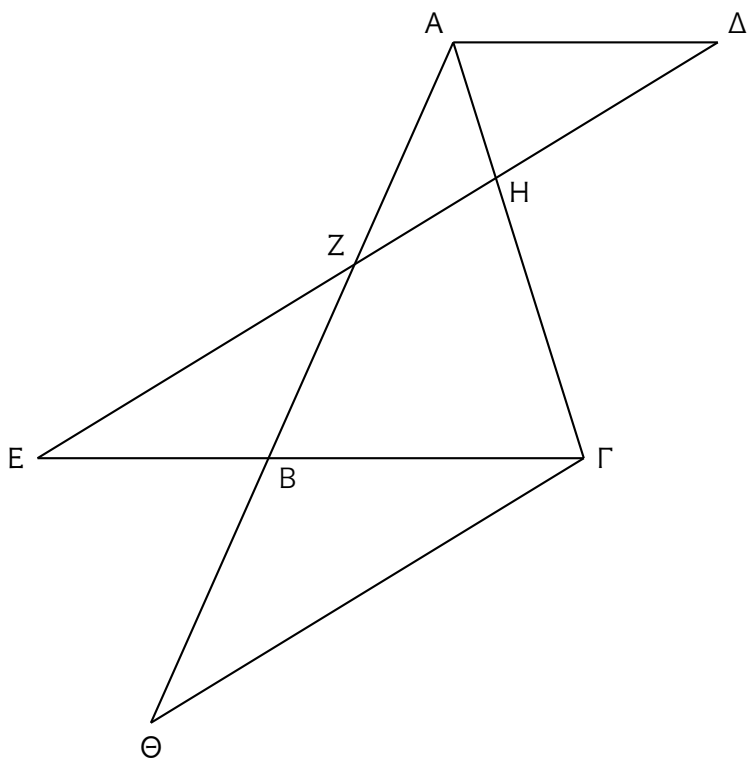
$$:: \Gamma\Theta : EZ$$

$$:: \Gamma B : BE.$$

Dolayısıyla

$$\Delta E \cdot ZH : EZ \cdot H\Delta :: \Gamma B : BE.$$

Eğer $A\Delta$ paraleli diğer tarafa da ilerletilmiş ise, ve ΔE Δ 'dan Γ 'nın ötesine sürdürülmüş ise, aynı şey [doğrudur]. $\square$



Lemma XII (Önerme 138)

206. Bunlar şimdi kanıtlanmış olunca, eğer AB ve $\Gamma\Delta$ paralel ise, ve bunların üzerine bazı doğrular A Δ , AZ, B Γ , ve BZ düşerse, ve E Δ ve E Γ birleştirilirse, o zaman

H, M, ve K'dan geçen [çizgi'nin] doğru olduğu gösterilecek.

Kanıt. Zira ΔAZ üçgen olduğundan, ve AE ΔZ 'ya paralel olduğundan, ve ΔZ 'ya Γ 'da düşen E Γ sürdürülmüş olduğundan, önceden yazılmışlara göre

$$\Delta Z : Z\Gamma :: \Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E$$

meydana gelir. Yine ΓBZ üçgen olduğundan, ve $\Gamma\Delta$ 'ya paralel olan BE ilerletilmiş olduğundan, ve $\Gamma\Delta$ 'ya Δ 'da düşen ΔE sürdürülmüş olduğundan

$$\Gamma Z : Z\Delta :: \Delta E \cdot \Lambda K : \Delta K \cdot \Lambda E$$

meydana gelir. Böylece tersine

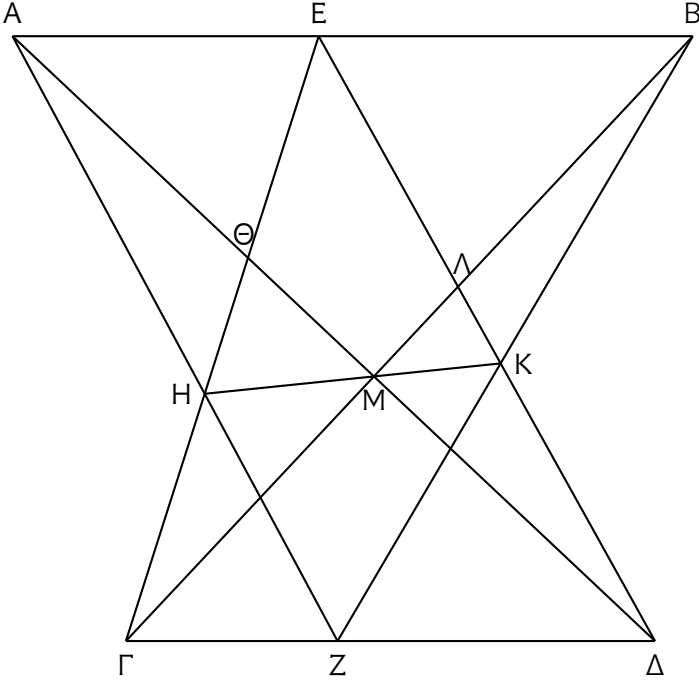
$$\Delta Z : Z\Gamma :: \Delta K \cdot \Lambda E : \Delta E \cdot \Lambda K$$

meydana gelir.

$$\Delta Z : Z\Gamma :: \Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E$$

da oldu. Ve böylece

$$\Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E :: \Delta K \cdot \Lambda E : \Delta E \cdot \Lambda K.$$



Dolayısıyla iki doğru $E\Gamma$ ve $E\Delta$, iki doğru $\Gamma M\Lambda$ ve $\Delta M\Theta$ 'ya sürdürülmüş olduğundan, ve

$$\Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E :: \Delta K \cdot E\Lambda : \Delta E \cdot \Lambda K$$

oldüğundan, böylece

H, M, ve K'dan [geçen çizgi] doğrudur;

zira bu gösterilmiş oldu. □

Lemma XIII (Önerme 139)

207. Ama o halde AB ve $\Gamma\Delta$ paralel olmasın, ama N'de kesişmiş olsun. O zaman yine

H, M, ve K'dan geçen [çizgi] doğrudur.

Kanıt. Üç doğru AN, AZ, ve AΔ üzerine aynı Γ noktasından iki doğru ΓE ve $\Gamma\Delta$ sürdürülmüş olduğundan,

$$\Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H : \Theta E :: \Gamma N \cdot Z\Delta : N\Delta \cdot \Gamma Z$$

meydana gelir. Yine aynı Δ noktasından, üç doğru BN, BΓ, ve BZ üzerine iki doğru ΔE ve ΔN sürdürülmüş olduğundan

$$N\Gamma \cdot Z\Delta : N\Delta : Z\Gamma :: \Delta K \cdot E\Lambda : \Delta E \cdot K\Lambda.$$

Ama

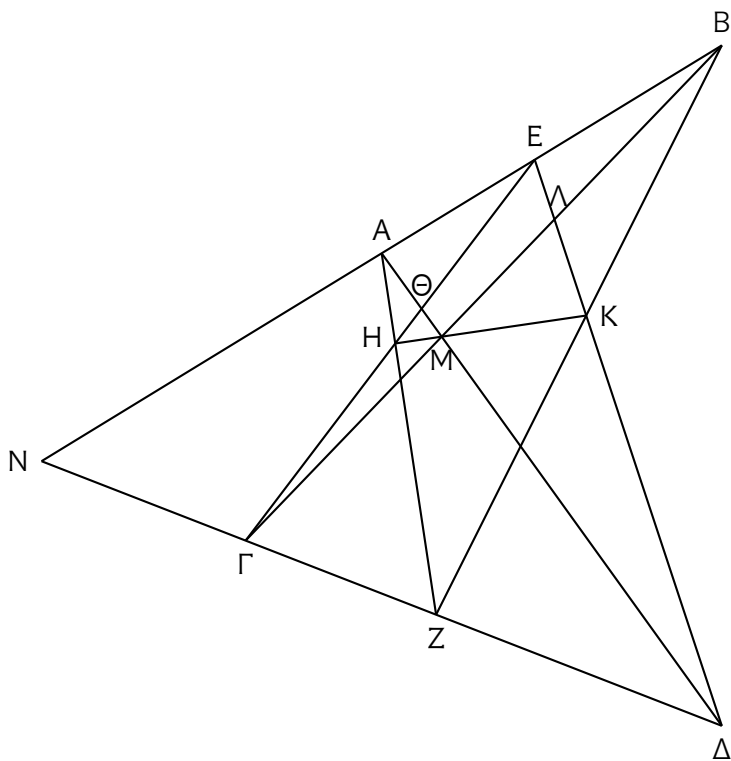
$$N\Gamma \cdot Z\Delta : N\Delta \cdot \Gamma Z :: \Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E$$

gösterilmiş oldu. Ve dolayısıyla

$$\Gamma E \cdot \Theta H : \Gamma H \cdot \Theta E :: \Delta K \cdot E\Lambda : \Delta E \cdot K\Lambda.$$

O halde önceden yazılmışlara göre

H, M, ve K'dan geçen [çizgi] doğrudur. $\square$



Lemma XIV (Önerme 140)

208. AB $\Gamma\Delta$ 'ya paralel olsun, ve AE ve ΓB sürdürülmüş olsun, ve [öyle] bir nokta BH'da Z [olsun] ki

$$\Delta E : E\Gamma :: \Gamma B \cdot HZ : ZB \cdot \Gamma H$$

[olsun]. O zaman

A, Z, ve Δ 'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt.

- Δ 'dan $B\Gamma$ 'ya paralel olan $\Delta\Theta$ ilerletilmiş olsun, ve AE Θ 'ya uzatılmış olsun,
- Θ 'dan $\Gamma\Delta$ 'ya paralel olan ΘK [ilerletilmiş olsun], ve $B\Gamma$ K'ya uzatılmış olsun.

Dolayısıyla

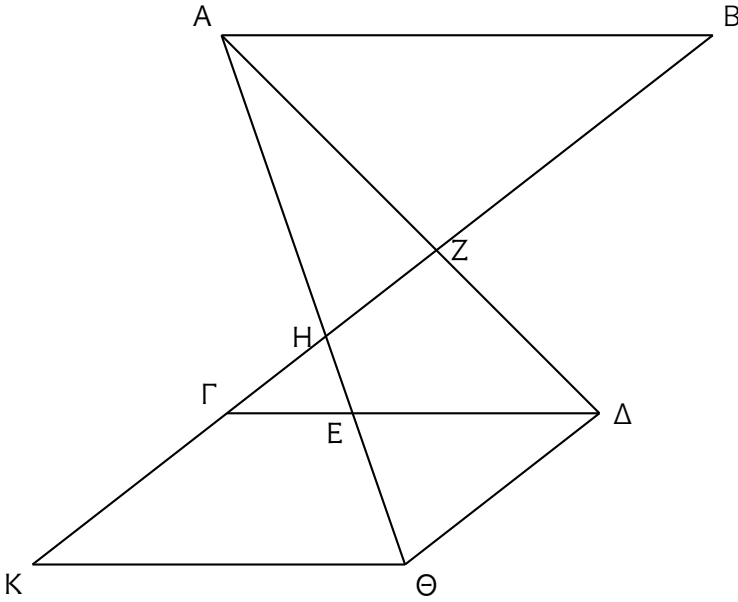
$$\Delta E : E\Gamma :: \Gamma B \cdot ZH : ZB \cdot \Gamma H,$$

$$\Delta E : E\Gamma :: \Delta\Theta : \Gamma H$$

$$:: \Delta\Theta \cdot BZ : \Gamma H \cdot BZ$$

olduğundan, böylece

$$B\Gamma \cdot ZH :: \Delta\Theta \cdot BZ.$$



Böylece

$$\begin{aligned} \Gamma B : BZ &:: \Delta \Theta : HZ \\ &:: \Gamma K : HZ \end{aligned}$$

orantı vardır. Böylece ayrıca

$$\begin{aligned} KB \text{ tümü} : BH \text{ tümü} &:: K\Gamma : ZH \\ &:: \Delta \Theta : ZH. \end{aligned}$$

Ama paralellerden

$$KB : BH :: \begin{cases} \Theta A : AH, \\ \Delta \Theta : ZH. \end{cases}$$

Ve $\Delta \Theta$ ve ZH paraleldir. Böylece

A, Z, ve Δ noktalarından [geçen çizgi] doğrudur. $\square$

Lemma XV (Önerme 141)

209. Bu önceden bakılmış olunca, AB $\Gamma\Delta$ 'ya paralel olsun, ve bunların üzerine doğrular AZ, ZB, ΓE , ve E Δ düşmüş olsun, ve B Γ ve HK birleştirilmiş olsun. O zaman

A, M, ve Δ 'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt. ΔM birleştirilmiş olsun ve Θ 'ya uzatılmış olsun. Dolayısıyla B ΓZ üçgeninin B tepe noktasından $\Gamma\Delta$ 'ya paralel olan BE ilerletilmiş olduğundan ve ΔE sürdürülmüş olduğundan,

$$\Gamma Z : Z\Delta :: \Delta E \cdot K\Lambda : E\Lambda \cdot K\Delta$$

meydana gelir. Ayrıca

$$\Delta E \cdot K\Lambda : \Delta K \cdot \Lambda E :: \Gamma H \cdot \Theta E : \Gamma E \cdot H\Theta$$

(zira üç doğru $\Gamma\Lambda$, $\Delta\Theta$, ve HK üzerine aynı E noktasından iki doğru E Γ ve E Δ sürdürülmüştür). Böylece

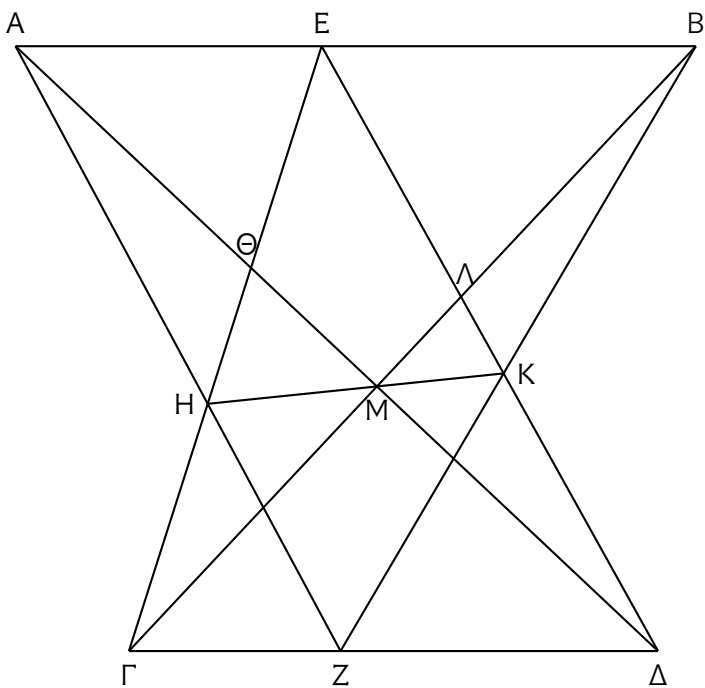
$$\Delta Z : Z\Gamma :: \Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E.$$

Ayrıca

Θ , M, ve Δ 'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Böylece önceden yazılmıştan ayrıca

A, M, ve Δ 'dan [geçen çizgi] doğrudur. $\square$



Lemma XVI (Önerme 142)

210. İki doğru AB ve AΓ üzerine aynı Δ noktasından ΔB ve ΔE sürdürülmüş olsun, ve bunlarda H ve Θ noktaları alınmış olsun, ve

$$EH \cdot Z\Delta : \Delta E \cdot HZ :: B\Theta \cdot \Gamma\Delta : B\Delta \cdot \Gamma\Theta$$

olsun. O zaman

A, H, ve Θ'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt. H'dan BΔ'ya paralel olan KΛ ilerletilmiş olsun. Dolayısıyla

$$EH \cdot Z\Delta : \Delta E \cdot ZH :: B\Theta \cdot \Gamma\Delta : B\Delta \cdot \Gamma\Theta$$

olduğundan, ama

$$\begin{aligned} EH \cdot Z\Delta : \Delta E \cdot HZ &:: (HE : E\Delta)(\Delta Z : ZH) \\ &:: (KH : B\Delta)(\Gamma\Delta : H\Lambda) \end{aligned}$$

olduğundan, ve ayrıca

$$B\Theta \cdot \Gamma\Delta : B\Delta \cdot \Gamma\Theta :: (\Theta B : B\Delta)(\Delta\Gamma : \Gamma\Theta)$$

olduğundan, böylece

$$(KH : B\Delta)(\Gamma\Delta : H\Lambda) :: (B\Theta : B\Delta)(\Delta\Gamma : \Gamma\Theta).$$

Lemma XVII (Önerme 143)

211. Ama o halde AB ve $\Gamma\Delta$ paralel olmasın, ama N'de kesişmiş olsun.

Kanıt. Dolayısıyla aynı A noktasından üç doğru BN, B Γ , ve BZ üzerine iki doğru ΔE ve ΔN sürdürülmüş olduğundan,

$$N\Delta \cdot \Gamma Z : N\Gamma \cdot \Delta Z :: \Delta E \cdot K\Lambda : E\Lambda \cdot K\Delta.$$

Ve

$$E\Delta \cdot K\Lambda : E\Lambda \cdot K\Delta :: E\Theta \cdot \Gamma H : E\Gamma \cdot \Theta H$$

(zira yine üç doğru $\Gamma\Lambda$, $\Delta\Theta$, ve HK üzerine aynı E noktasından sürdürülmüştür iki doğru E Γ ve E Δ). Ayrıca

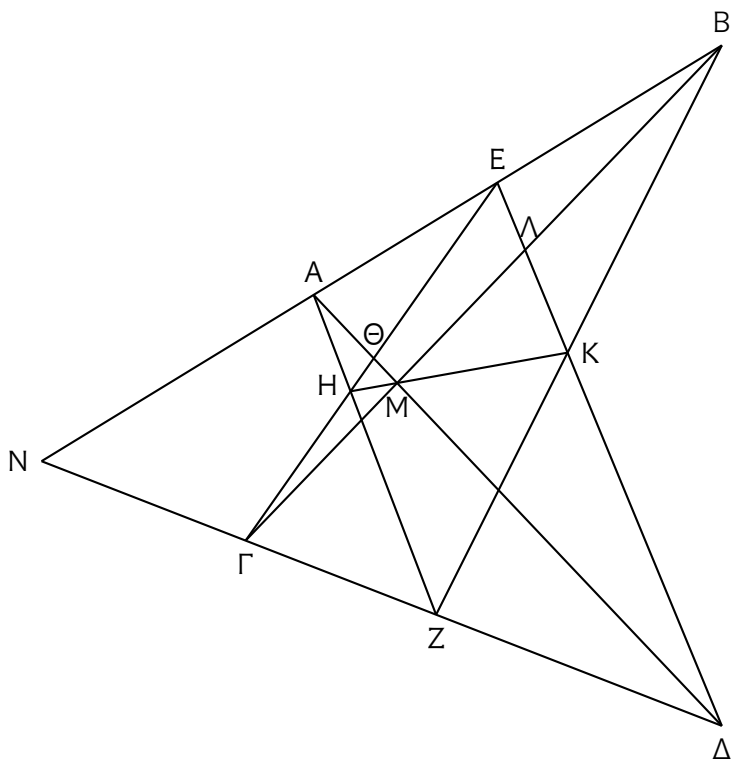
$$E\Theta \cdot \Gamma H : E\Gamma \cdot \Theta H :: N\Delta \cdot \Gamma Z : N\Gamma \cdot Z\Delta.$$

O halde önceden yazılmıştan

A, Θ , ve Λ 'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Böylece

A, M, ve Λ 'dan [geçen çizgi] doğrudur. $\square$



Lemma XVIII (Önerme 144)

212. Üçgen $AB\Gamma$ [olsun], ve $B\Gamma$ 'ya paralel olan $A\Delta$ ilerletilmiş olsun, ve ΔE ve ZH sürdürülmüş olsun. Ayrıca

$$EB^2 : E\Gamma \cdot \Gamma B :: BH : H\Gamma$$

olsun ($\xi\sigma\tau\omega$ δὲ ὡς τὸ ἀπὸ EB πρὸς τὸ ὑπὸ $E\Gamma B$, οὕτως ἢ BH πρὸς τὴν $H\Gamma$). O zaman $B\Delta$ birleştirilirse,

Θ , K , Γ 'dan [geçen çizgi] doğru olur.

Kanıt. $EB^2 : E\Gamma \cdot \Gamma B :: BH : H\Gamma$ olduğundan, $E\Gamma \cdot \Gamma B : EB \cdot B\Gamma$ ile aynı olan ortak $\Gamma E : EB$ oranı eklenmiş olsun. Böylece eşitlikten

$$\left. \begin{array}{l} EB^2 : EB \cdot B\Gamma \\ EB : B\Gamma \end{array} \right\} :: (BH : H\Gamma) \underbrace{(E\Gamma \cdot \Gamma B : EB \cdot B\Gamma)}_{E\Gamma : EB}.$$

Öyleyse

$$\begin{aligned} EB^2 : EB \cdot B\Gamma &:: (BH : H\Gamma)(E\Gamma : EB) \\ &:: E\Gamma \cdot BH : EB \cdot \Gamma H. \end{aligned}$$

Önceden yazılmış lemmadan

$$EB : B\Gamma :: \Delta Z \cdot \Theta E : \Delta E \cdot Z\Theta,$$

Lemma XIX (Önerme 145)

213. Üç doğru AB, AΓ, AΔ üzerine bir E noktasından iki doğru EZ ve EB sürdürülmüş olsun. Ayrıca

$$EZ : ZH :: \Theta E : \Theta H$$

olsun. O zaman

$$BE : B\Gamma :: E\Delta : \Delta\Gamma$$

meydana gelir.

Kanıt. H'dan BE'a paralel olan HK ilerletilmiş olsun. Dolayısıyla

$$EZ : ZH :: E\Theta : \Theta H$$

olduğundan, ama

$$\begin{aligned} EZ : ZH &:: E\Theta : \Theta H, \\ E\Theta : \Theta H &:: \Delta E : H\Lambda \end{aligned}$$

olduğundan, böylece ayrıca

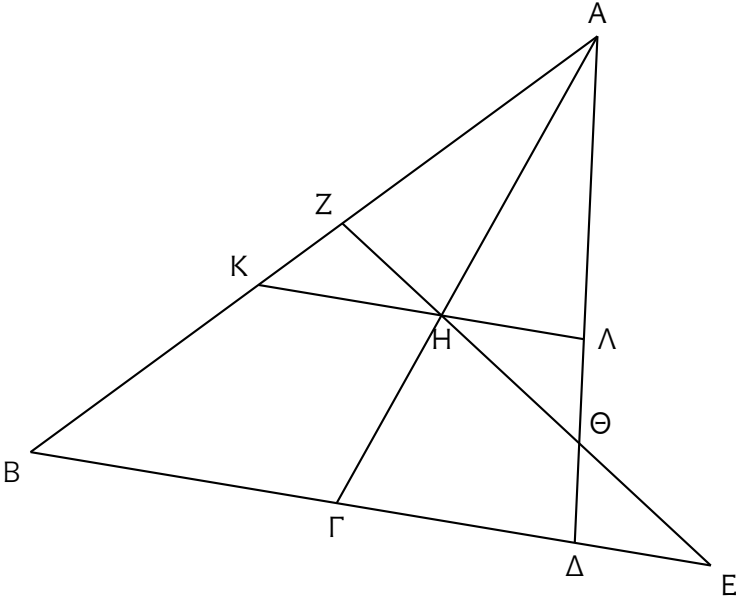
$$BE : HK :: \Delta E : H\Lambda.$$

İzlemeyle

$$EB : E\Delta :: KH : H\Lambda.$$

Ve

$$KH : H\Lambda :: B\Gamma : \Gamma\Delta.$$



Böylece ayrıca

$$BE : E\Delta :: B\Gamma : \Gamma\Delta.$$

İzlemeyle

$$EB : B\Gamma :: E\Delta : \Delta\Gamma.$$

□

[Diğer] durumlar da benzerdir.

Ek

Fiiller Sözlüğü

ἄγω ilerle= (örneğin Lemma I’de: **Ἦχθω** διὰ τοῦ Ζ τῇ ΒΔ παράλληλος ἢ ΖΛ, “Z’dan BΔ’ya paralel olan ΖΛ *ilerletilmiş olsun*”)

ἀγάγω (sadece Lemma IV’te: Ἐὰν γὰρ διὰ τοῦ Ε τῇ ΘΓ παράλληλον **ἀγάγω** τὴν ΕΖ, “Eğer E’dan ΘΓ’ya paralel olan ΕΖ *ilerlersem*”)

διάγω sürdür= (örneğin Lemma III’te: Εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΑΒ ΓΑ ΔΑ **διήχθωσαν** δύο εὐθεῖαι αἱ ΘΕ ΘΔ, “Üç doğru ΑΒ, ΓΑ, ve ΔΑ üzerine iki doğru ΘΕ ve ΘΔ *sürdürülmüş olsun*”)

αἰρέω

ἀφαιρέω ayır= (Lemma VIII)

βάλλω

ἐκβάλλω uzat=

μεταβάλλω değiştir=

γινόμεαι ol= (doğ=, meydana gel=)

γράφω

προγράφω önceden yaz=

δείκνυμι göster=

ἀποδείκνυμι kanıtl= (Lemma XII)

εἶμι ol=

εἶρω söyle= (λέγω’nun gelecek zamanı olarak kullanılır. Lemma VI’da sadece: ἐκατέρων γὰρ τῶν **εἰρημένων** ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τῆς ΘΗ πρὸς τὴν ΗΕ λόγος, “zira *söylen-*

miş [iki oranın] her biri, ΘΗ : ΗΕ oranıyla aynıdır”)
ἔχω -i ol=
ζεύγνυμι birleştir=
ἐπιζεύγνυμι birleştir=
θεωρέω
προθεωρέω önceden bak= (Sadece Lemma XV’te:
 Τούτου προτεθεωρημένου [*genitivus absolutus*], “Bu
 önceden bakılmış olunca”)
κεῖμαι otur=
προσκέειμαι eklen=
ὑποκέειμαι varsayıl=
κλάω eğ= (Lemma IX: **κεκλάσθω** ἢ ΖΘΗ, “ΖΘΗ *eğilmiş olsun*”)
κρούω
ἐκκρούω kov=
λαμβάνω al= (Lemma XVI’da: ἐπ’ αὐτῶν **εἰλήφθω** σημεῖα τὰ
 Η Θ, “bunlarda Η ve Θ noktaları *alınmış olsun*”)
πίπτω
ἐμπίπτω üzerine düş=
συμπίπτω kesiş= (her zaman **συμπιπτέτω** [tekil] veya
συμπιπτέτωσαν [çoğul], “*kesişmiş olsun*”)
τίθημι koy= (Lemma VI: ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῆς ΕΒ **θῶ** τῇ ΗΒ ἴσην
 τὴν ΒΘ, “zira eğer ΕΒ’da ΗΒ’ya eşit olan ΒΘ’yu *koyar-*
sam”)
τυγχάνω rastla= (**τυχόν**, “rasgele”: aşağıya bakın)

Edatlar Sözlüğü

ἀλλά ama

ἄλλο δέ τι τυχόν τὸ ὑπὸ τῶν da başka rasgele bir [çarpımdır] (örneğin Lemma III’e bakın)

ἄρα böylece

διὰ ταῦτά aynı [sebepl]e

γάρ zira

[*genitivus absolutus*] -ince

δέ de, ve

δή o halde

ἐπεὶ -diğinden

καὶ de, dahi, ve, ayrıca—örneğin Lemma I’de:

ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΛ,
οὕτως ἐν παραλλήλῳ ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΖ,
καὶ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ,

Böylece paralellerden $EB : BL :: \begin{cases} EK : KZ, \\ \Delta\Theta : ZH. \end{cases}$

κατὰ τὰ αὐτά aynı [şekil]de

μέν...δέ ●...●...de

οὖν dolayısıyla

πάλιν yine

τουτέστιν yani—örneğin Lemma I'de:

ἐστιν ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΖ,
τουτέστιν ἐν παραλλήλῳ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΛ,
οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΗ,

$$\underbrace{\Delta A : A Z} :: \Gamma A : A H, \\ B A : A \Lambda$$

ve Lemma III'te:

ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖ ΗΘ,
οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖ ΘΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖ ΗΘ,
τουτέστιν ἡ ΘΜ πρὸς ΘΗ,
τουτέστιν ἡ ΛΘ πρὸς τὴν ΘΚ,

$$\begin{aligned} E\Theta \cdot HZ : EZ \cdot H\Theta &:: EZ \cdot \Theta M : EZ \cdot H\Theta \\ &:: \Theta M : \Theta H \\ &:: \Lambda\Theta : \Theta K. \end{aligned}$$

ὥστε öyleyse

Yunan Alfabeti

A	α	alfa
B	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ	epsilon (“çıplak e”)
Z	ζ	zeta
H	η	eta
Θ	θ	theta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mü
N	ν	nü
Ξ	ξ	ksi
O	$\omicron$	omikron (“küçük o”)
Π	π	pi
P	ρ	ro (<i>rho</i>)
Σ	σ, ς	sigma
T	τ	tau
Y	υ	üpsilon
Φ	ϕ	fi (<i>phi</i>)
X	χ	hi (<i>khi, chi</i>)
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega (“büyük o”)

Harfler, Yunan Font Derneği’nin “NeoHellenic” fontundan alınır. Bu font

$$\delta = \Delta, \quad \epsilon = \epsilon, \quad \zeta = \text{z}, \quad \Xi = \Xi = \text{X}, \quad \Omega = \omega$$

alternatif biçimlerini sağlar. Sigmanın küçük ς biçimi sadece bir sözcüğün sonunda kullanılır.

Kaynakça

- [1] Archimedes. *The Two Books On the Sphere and the Cylinder*, volume I of *The Works of Archimedes*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. Translated into English, together with Eutocius' commentaries, with commentary, and critical edition of the diagrams, by Reviel Netz.
- [2] Mustafa Kemal Atatürk. *Geometri*. Türk Dil Kurumu, Ankara, 2000. 4. baskı (1. baskı 1971).
- [3] Güler Çelgin. *Eski Yunanca–Türkçe Sözlük*. Kabalcı, İstanbul, 2011.
- [4] Richard Dedekind. *Essays on the Theory of Numbers. I: Continuity and Irrational Numbers. II: The Nature and Meaning of Numbers*. Dover Publications, New York, 1963. Authorized 1901 translation by Wooster Woodruff Beman of “Stetigkeit und irrationale Zahlen” and “Was sind und was sollen die Zahlen” (second edition, 1893; first, 1887).
- [5] Abdurrahman Demirtaş. *Matematik Sözlüğü*. Bilim Teknik Kültür Yayınları, Ankara, 1986.
- [6] Girard Desargues. *Oeuvres de Desargues réunies et analysées par M. Poudra*, volume 1. Leiber, Paris, 1864. gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k993793, accessed January 8, 2020.
- [7] Girard Desargues. Desargues on perspective triangles. In Smith [22], pages 307–10. Translated by Lao G. Simons from [6, pp. 399, 413–5, 430–3].

- [8] René Descartes. *The Geometry of René Descartes*. Dover Publications, New York, 1954. Translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham, with a facsimile of the first edition of 1637.
- [9] Euclid. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Dover Publications, New York, 1956. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by Thomas L. Heath. In three volumes. Republication of the second edition of 1925. First edition 1908.
- [10] Euclid. *Öklid'in Öğeler'inin 13 Kitabından Birinci Kitap*. Mathematics Department, Mimar Sinan Fine Arts University, Istanbul, 4th edition, September 2014. The first of the 13 books of Euclid's Elements. Greek text, with Turkish version by Özer Öztürk & David Pierce.
- [11] Thomas Heath. *A History of Greek Mathematics. Vol. I. From Thales to Euclid*. Dover Publications, New York, 1981. Corrected reprint of the 1921 original.
- [12] Thomas Heath. *A History of Greek Mathematics. Vol. II. From Aristarchus to Diophantus*. Dover Publications, New York, 1981. Corrected reprint of the 1921 original.
- [13] Gerhard Hessenberg. Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen. *Math. Ann.*, 61(2):161–172, 1905.
- [14] David Hilbert. *Foundations of Geometry*. Open Court, La Salle, Illinois, 1971. Second English edition, translated by Leo Unger from the Tenth German edition, revised and enlarged by Paul Bernays.
- [15] Morris Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, New York, 1972.

- [16] Henry George Liddell and Robert Scott. *A Greek-English Lexicon*. Clarendon Press, Oxford, 1996. “Revised and augmented throughout by Sir Henry Stuart Jones, with the assistance of Roderick McKenzie and with the cooperation of many scholars. With a revised supplement.” First edition 1843; ninth edition 1940.
- [17] James Morwood and John Taylor, editors. *Pocket Oxford Classical Greek Dictionary*. Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [18] Pappus of Alexandria. *Pappus Alexandrini Collectionis Quae Supersunt*, volume II. Weidmann, Berlin, 1877. E libris manu scriptis edidit, Latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch.
- [19] Pappus of Alexandria. *Book 7 of the Collection. Part 1. Introduction, Text, and Translation*. Springer Science+Business Media, New York, 1986. Edited With Translation and Commentary by Alexander Jones.
- [20] David Pierce. Thales and the nine-point conic. *The De Morgan Gazette*, 8(4):27–78, 2016. education.lms.ac.uk/2016/12/thales-and-the-nine-point-conic/, accessed June 1, 2017; demorgangazette.files.wordpress.com/2021/02/0a415-dmg_8_no_3_pierce_25dec16-1.pdf, accessed March 13, 2022.
- [21] Proclus. *A Commentary on the First Book of Euclid’s Elements*. Princeton Paperbacks. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992. Translated from the Greek and with an introduction and notes by Glenn R. Morrow. Reprint of the 1970 edition. With a foreword by Ian Mueller.
- [22] David Eugene Smith. *A Source Book in Mathematics*. 2 vols. Dover Publications, New York, 1959. Unabridged republication of the first edition, 1929, published by McGraw-Hill.

- [23] Herbert Weir Smyth. *Greek Grammar*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1980. Revised by Gordon M. Messing, 1956. Eleventh Printing. Original edition, 1920.
- [24] D. J. Struik, editor. *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*. Princeton Paperbacks. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986. Reprint of the 1969 edition.
- [25] Rene Taton. L' « Essay pour les Coniques » de Pascal. *Revue d'histoire de science et de leurs applications*, 8(1):1–18, 1955. www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0048-7996_1955_num_8_1_3488.
- [26] Ivor Thomas, editor. *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics. Vol. I. From Thales to Euclid*. Number 335 in Loeb Classical Library. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1951. With an English translation by the editor.
- [27] Ivor Thomas, editor. *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics. Vol. II. From Aristarchus to Pappus*. Number 362 in Loeb Classical Library. Harvard University Press, Cambridge, Mass, 1951. With an English translation by the editor.
- [28] Arthur W. Weeks and Jackson B. Adkins. *A Course in Geometry: Plane and Solid*. Ginn and Company, Lexington MA, 1970.

yazar	eserinin adı	Yunancası	İngilizcesi	*
Öklid	<i>Veriler</i>	Δεδωμένα	<i>Data</i>	1
Apollonius	<i>Oranın Kesilmesi</i>	Λόγου ἀπλοτομή	<i>Cutting-off of a Ratio</i>	2
Apollonius	<i>Alanın Kesilmesi</i>	Χωρίου ἀπλοτομή	<i>Cutting-off of an Area</i>	2
Apollonius	<i>Belirli Kesit</i>	Διορισμένης τομῆ	<i>Determinate Section</i>	2
Apollonius	<i>Teghler</i>	Ἐτταφαί	<i>Tangencies</i>	2
Öklid	<i>Porizmalar</i>	Πορίσματα	<i>Porisms</i>	3
Apollonius	<i>Yönelmeler</i>	Νεύσεις	<i>Vergings</i>	2
Apollonius	<i>Düzlem Yerleri</i>	Τόποι ἐπιπτέδοι	<i>Plane Loci</i>	2
Apollonius	<i>Koni Kesitleri</i>	Κωνικά	<i>Conics</i>	8
Aristaeus	<i>Cisim Yerleri</i>	Τόποι στερεοί	<i>Solid Loci</i>	5
Öklid	<i>Yüzey Yerleri</i>	Τόποι τῶν πρὸς ἐπιφανείᾳ	<i>Surface Loci</i>	2
Eratosthenes	<i>Ortalar hakkında</i>	Περὶ μεσοτήτων	<i>On Means</i>	2

Analiz Hazinesi'nin içindekiler. (*Eserin kitap [cilt] sayısı)