

Geometriler Finali Hakkında

David Pierce

9 Haziran 2022

Matematik Bölümü

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi

mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/
polytropy.com/geometriler

Geometriler finalinde iki soru olacak,

- 1) tam dörtgen teoremi ve
- 2) sonsuz üçgenler

hakkında.

İçindekiler

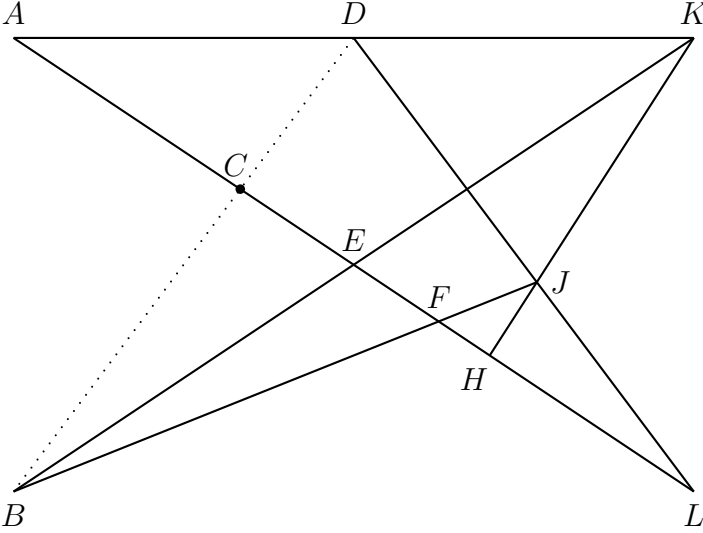
1	Tam Dörtgen Teoremi	3
1.1	Durumlar	4
1.2	Kanıtlar	6
1.3	Çapraz Oranlar	9
2	Sonsuz Üçgenler	14

1 Tam Dörtgen Teoremi

Şekilde BD 'nin AL 'yi C 'de kesmesi için, gerek ve yeter bir koşul,

$$LA : FE :: HL \cdot AC : HF \cdot EC$$

orantısının sağlanmasıdır.



Kısaca verilen harfli bir diyagram için *Tam Dörtgen Teoremi'nin* bir kanıtını isteyebilirim. Yukarıdaki tam dörtgen $BDKJ$ olur.

1.1 Durumlar

Pappus'un Lemma I, IV, V, VI, ve VII'sini bir arada anlayabiliriz. Zira iki doğru, bir A noktasında kesişsin. (Bundan sonra diyagramlar çizmeyeceğim; lütfen kendi diyagramlarınızı çizin.) Verilen doğrulardan

- birinde B, C, D, E , ve F noktaları otursun;
- diğerinde H ve J noktaları otursun.

Hiçbir doğrunun noktalarının sırası verilmez, ama

- BH ve CJ, K noktasında kesişsin;
- DH ve EJ, L noktasında kesişsin.

Lemma IV'e göre

$$AF \cdot BC : AB \cdot CF :: AF \cdot DE : AD \cdot EF \quad (1)$$

ise

$$F \text{ noktası } KL \text{ doğrusundadır.} \quad (2)$$

Bunun tersi de doğrudur. Ayrıca (1),

$$AF \cdot BC : AF \cdot DE :: AB \cdot CF : AD \cdot EF$$

ile denktir, ve bu orantı,

$$BC : DE :: (AB : AD)(CF : EF) \quad (3)$$

biçiminde yazılabilir. Aşağıda (3)'ün ve (2)'nin birbiriyle denk olduğunu göstereceğiz. Bundan önce verilen denkliğin değişik biçimlerine ve özel durumlarına bakalım.

Bu özel durumlardan birinde, D ile C aynıdır, ama Pappus bunu vermez. **Lemma V'te**, D ile C ve F ile A aynıdır. Bu durumda (3),

$$BC : CE :: AB : AE$$

olur. Bu orantı,

$$AB : BC :: AE : CE$$

ile denktir. Buna göre AC doğru parçasının B 'deki ve E 'deki bölünme oranları aynıdır.

Lemma I, Lemma IV'ün özel bir durumu değildir, ama ikisi daha genel bir teoremin özel durumlarıdır. Lemma I'de F noktası, sonsuza geçmiştir. O zaman (2),

$$KL \parallel AB \quad (4)$$

olur ve (3),

$$BC : DE :: AB : AD \quad (5)$$

olur. Bu orantı, hem

$$AB : BC :: AD : DE$$

hem de

$$AB : AC :: AD : AE \quad (6)$$

ile denktir. Lemma I'in tersi de doğrudur, yani (4) ise (6) olur. İki özel durum vardır.

- **Lemma VII'de** D ile C aynıdır, dolayısıyla (6),

$$AB : AC :: AC : AE$$

olur. Bu durumda AB ve AE 'nin orta orantılısı, AC olur.

- **Lemma VI'da** D ile C ve E ile B aynıdır, dolayısıyla (6),

$$AB : AC :: AC : AB$$

olur. Burada B ve C birbirinden farklı olduğundan, son orantıdan

$$BA = AC \quad (7)$$

eşitliği çıkar.

Bu notların tek eşitliği, (7)'dir. Bir orantı, bir “aynılıktır.” Öklid geometrisinde bir eşitlik, bir aynılık olmayabilir. Örneğin (7)'de BA ve AC , aynı doğru parçası değildir. İkizkenar bir üçgende iki kenar birbirine eşittir; tabii ki bu kenarlar birbiriyle aynı değildir. Aynı zamanda (6)'ya göre

$$AB : AC, \quad AD : AE,$$

ifade olarak farklıdır, ama aynı oranı ifade ediyorlar. Matematikte bugün eşitlik, normalde aynılık olarak anlaşılır, ve (6),

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$$

olarak yazılır. Bu yanlış değildir, ve istediğiniz ifadeleri kullanabilirsiniz.

1.2 Kanıtlar

Pappus her lemma için farklı bir kanıt verir, ama aynı fikir her durumda kullanılabilir. Bu fikir, **Menelaus Teoremi'dir**. Bir PQR üçgeninde

- PQ kenarı Z noktasında,
- PR kenarı Y noktasında,
- QR kenarı X noktasında

kesilmiş olsun. Menelaus Teoremi'ne göre

$$Z \text{ noktası } XY \text{ doğrusundadır} \quad (8)$$

ancak ve ancak

$$(QX : XR)(RY : YP) :: QZ : PZ. \quad (9)$$

Zira P 'den geçen, QR 'ye paralel olan doğru XY 'yi T 'de kessin. Thales Teoremi sayesinde (8) ve

$$QX : PT :: QZ : PZ \quad (10)$$

orantısı denktir. Ayrıca

$$RY : YP :: XR : PT$$

orantısı doğrudur, dolayısıyla

$$\begin{aligned} QX : PT &:: (QX : XR)(XR : PT) \\ &:: (QX : XR)(RY : YP). \end{aligned}$$

Bu şekilde (10) ve (9) denktir. Böylece Menelaus Teoremi kanıtlanmıştır.

Eğer Z noktası sonsuza geçerse, o zaman

- (8), $XY \parallel QP$ olur,
- (9), $QX : XR :: PY : YR$ olur,
- Menelaus Teoremi, Thales Teoremi olur.

Şimdi Lemma IV'ü ve tersini kanıtlayalım. Menelaus Teoremi'ni üç kere kullanacağız, ECJ , CAJ , ve EAJ üçgenleri ile. İlk olarak, ECJ üçgeninde, (2) ve

$$(CK : KJ)(JL : LE) :: CF : EF \quad (11)$$

denktir. Kalan iki üçgen ile (11)'deki ilk iki oranı için yeni biçimler elde edeceğiz.

- ACJ üçgeninde

$$CK : JK :: (CB : BA)(AH : HJ). \quad (12)$$

- AJE üçgeninde

$$JL : EL :: (JH : HA)(AD : DE). \quad (13)$$

Burada (12)'yi ve (13)'ü çarparak

$$(CK : KJ)(JL : LE) :: (CB : BA)(AD : DE)$$

orantısını elde ederiz, ve bundan

$$(CK : KJ)(JL : LE) :: (AD : AB)(BC : DE). \quad (14)$$

O halde (11) ve

$$(AD : AB)(BC : DE) :: CF : EF$$

denktir. Ayrıca bu orantı ve (3) denktir. Bu şekilde Lemma IV ve tersi kanıtlanmıştır.

Pappus, açık bir şekilde Menelaus Teoremi'ni kullanmaz, ama aslında onu istediği yerlerde yeniden kanıtlar. Örneğin J' 'den geçen, AB 'ye paralel olan doğru

- BK 'yi V 'de,
- DL 'yi S 'de

kessin. O zaman

$$CK : JK :: CB : JV :: (CB : BA)(BA : JV),$$

ve ayrıca

$$BA : JV :: AH : HJ,$$

dolayısıyla (12) doğrudur. Aynı şekilde

$$JL : EL :: SJ : DE :: (SJ : AD)(AD : DE),$$

ve ayrıca

$$SJ : AD :: JH : HA,$$

dolayısıyla (13) doğrudur. Pappus'un kendi kanıtında

$$\begin{aligned} BC : DE &:: (BC : VJ)(VJ : SJ)(SJ : DE) \\ &:: (CJ : JK)(AB : AD)(JL : EL), \end{aligned}$$

dolayısıyla (3) ve (11) denktir. Sevdiğiniz yöntemi kullanabilirsiniz.

Lemma I'i ve tersini göstermek için (14)'ün sayesinde (5)'in ve

$$CK : KJ :: EL : LJ$$

orantısının denk olduğunu fark edelim. Thales Teoremi'nden bu orantı ve (4) denktir. Şimdi Lemma I ve tersi kanıtlanmıştır.

Lemma I ve IV'te H , J , K , ve L noktaları, bir **tam dörtgenin** köşeleridir. Bu tam dörtgenin

- HJ kenarı A' 'da,
- HK kenarı B' 'de,
- JK kenarı C' 'de,
- HL kenarı D' 'de,
- JL kenarı E' 'de

bir doğru keser. O zaman tam dörtgenin kalan KL kenarı aynı doğruyu F' 'de keser, ancak ve ancak A , B , C , D , E , ve F noktaları (1)'i sağlar. Ayrıca F sonsuzdadır, yani KL AE' 'ye paraleldir, ancak ve ancak (5) sağlanır.

Özel olarak eğer bir doğru, tam bir dörtgenin kenarlarını keserse, o zaman kesişim noktalarının ilk beşi, altıncısını belirler.

1.3 Çapraz Oranlar

Lemma IV'ün ve tersinin kanıtında üç üçgen kullandık. Onların yerine DBH , BAH , ve DAH 'yi kullanarak (2)'nin ve

$$(BK : KH)(HL : LD) :: BF : DF \quad (15)$$

orantısının birbirine denk olduğunu ve

$$\begin{aligned} BK : HK &:: (BC : CA)(AJ : JH), \\ HL : DL &:: (HJ : JA)(AE : ED) \end{aligned}$$

orantılarının doğru olduğunu elde ederiz. Bundan dolayı (2), aşağıdaki orantıların her birine denktir:

$$\begin{aligned} (BC : CA)(AE : ED) &:: BF : DF, \\ (AE : AC)(BC : DE) &:: BF : DF, \\ BC : DE &:: (AC : AE)(BF : DF), \\ AF \cdot BC : AF \cdot DE &:: AC \cdot BF : AE \cdot DF, \end{aligned} \quad (16)$$

ve sonda

$$AF \cdot BC : AC \cdot BF :: AF \cdot DE : AE \cdot DF. \quad (17)$$

Pappus'un yöntemiyle, H 'den geçen, AB 'ye paralel olan doğru

- CK 'yi G 'de,
- EL 'yi V 'de

kessin. O zaman

$$\begin{aligned} BC : DE &:: (BC : HG)(HG : HV)(HV : DE) \\ &:: (KB : KH)(AC : AE)(HL : DL), \end{aligned}$$

dolayısıyla (15), (16), ve sonuç olarak (17) denktir.

Şimdi (17) orantısı, (1) ile aynı değildir, ama ona denktir. Bu denkliliği göstermek için Pappus'un Lemma III'ünü ve *çapraz oranı* kavramını kullanabiliriz.

Tanıma göre

$$(AC : CB)(BF : FA)$$

bileşik oranı,

$$(A, B; C, F)$$

olarak yazılan **çapraz orandır** (veya *çifte oran*). O zaman orantı (1),

$$(A, C; F, B) :: (A, E; F, D) \quad (18)$$

olur, dolayısıyla Lemma IV ve tersi, (18)'in ve (2)'nin denkliği olur.

Eğer (18)'de her tarafın harflerine aynı permütasyon uygulanırsa, denk bir eşitlik çıkar. Aslında

$$\left. \begin{aligned} (B, A; C, F) &:: (A, B; C, F)^{-1}, \\ (A, B; F, A) &:: (A, B; C, F)^{-1}, \\ (A, C; B, F) &:: 1 - (A, B; C, F). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Buradaki ilk iki orantıyı göstermek kolaydır. Son orantıyı göstermek için, **Lemma III'teki** gibi, A' 'dan geçen, CK 'ye paralel olan doğru,

- BK 'yi M' 'de,
- FK 'yi N' 'de

kessin. O zaman

$$\begin{aligned} (A, C; B, F) &:: (AB : BC)(CF : FA) \\ &:: (AM : KC)(KC : AN) \\ &:: AM : AN. \end{aligned}$$

Şimdi B' 'den geçen, CK 'ye paralel olan doğru, FK 'yi O 'da kessin. O zaman

$$AC : CB :: MK : KB :: MN : OB,$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned} (A, B; C, F) &:: (AC : CB)(BF : FA) \\ &:: (MN : OB)(OB : AN) \\ &:: MN : AN. \end{aligned}$$

Şimdi

$$(AM : AN) + (MN : AN) :: (AM + MN) : AN :: AN : AN$$

olduğundan

$$(A, C; B, F) + (A, B; C, F) :: 1,$$

ve (19)'un son orantısı kanıtlanmıştır.

Gruplar kuramında $\{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin permütasyonları, S_4 grubunu oluşturur, ve bu grup,

$$(1 \ 2), \quad (2 \ 3), \quad (3 \ 4)$$

döngüleri tarafından üretilir. Şimdi $\tau \in S_4$ ise

$$\tau(A_1, A_2; A_3, A_4) :: (A_{\tau(1)}, A_{\tau(2)}; A_{\tau(3)}, A_{\tau(4)})$$

olsun. Örneğin

$$\begin{aligned} (1 \ 2) (A, B; C, F) &:: (B, A; C, F), \\ (2 \ 3) (A, B; C, F) &:: (A, C; B, F), \\ (3 \ 4) (A, B; C, F) &:: (A, B; F, C). \end{aligned}$$

O zaman (19)'daki orantıların sayesinde, her λ çapraz oranı için, S_4 grubunun her τ elemanı için $\tau\lambda$ oranı, λ 'dan

$$x \mapsto x^{-1}, \quad x \mapsto 1 - x$$

işlemleriyle elde edilebilir. Bundan dolayı $\tau\lambda$, aşağıdaki oranların biridir.

$$\begin{array}{ccc} \lambda, & 1 - \frac{1}{\lambda}, & \frac{1}{1 - \lambda}, \\ \frac{1}{\lambda}, & \frac{\lambda}{\lambda - 1}, & 1 - \lambda. \end{array}$$

Bunların bazıları sonsuz olabilir. Aslında

$$(A, B; C, A) :: \infty$$

ve ayrıca

$$\infty^{-1} :: 0, \quad 0^{-1} :: \infty, \quad 1 - \infty :: \infty$$

tanımlanabilir. Burada ∞ , bir orandır.

Aynı zamanda her doğruya bir **sonsuzdaki nokta** eklenebilir. Paralel doğruların sonsuzdaki noktası aynı olsun. Tüm sonsuzdaki noktalar, yeni bir doğru oluştursun. Elde ettiğimiz düzlem, **projektif düzlemdir**. Burada

- iki doğru, bir ve tek bir noktada kesişir;
- iki noktadan bir ve tek bir doğru geçer.

Bir doğrunun sonsuzdaki noktası ∞ olarak yazılabilir, ve bu durumda

$$(A, B; C, \infty) :: AC : BC$$

tanımlanabilir. Dediğimiz gibi Lemma IV, (18)'in ve (2)'nin denkliğidir, ama burada F sonlu olmalı; sonsuz ise aynı denklik Lemma I olur.

2 Sonsuz Üçgenler

Lobaçevski düzleminde, Öklid'in ilk 28 önermesi doğrudur. Özellikle Önerme 28, aşağıdaki şekilde doğrudur. Eğer iki doğru üzerine düşen bir doğru, dış açıyı, iç ve karşıt ve aynı tarafta kalan açıya eşit yaparsa, veya iç ve aynı tarafta kalan açılar iki dik açıya eşit yaparsa, o zaman ilk iki doğru kesişmeyecek.

Lobaçevski düzleminde bu önermenin tersi yanlıştır. Burada kesişmeyen doğrular, aynı doğru ile farklı açılar yapabilir. Aslında ABC dik bir açı olduğunda, öyle bir CD ışını vardır ki açı olarak

- $BCE < BCD$ ise CE , BA 'yı keser;
- $BCF > BCD$ ise CF , BA 'yı kesmez;
- BCD , dik açıdan küçüktür.

Bu durumda CD de BA 'yı kesmez, ve ayrıca CD , C **noktasından** BA 'ya **paraleldir**. Lobaçevski'nin kanıtladığı teoremlere göre

- bir ışın, noktalarının birinden başka bir ışına paralel ise, her noktasından paraleldir;
- paralellik bağıntısı, hem simetrik hem de geçişlidir, dolayısıyla (bir ışın, kendisine paralel sayılınca) bir denklik bağıntısıdır.

Paralel ışınlar kesişmez, ve ondan uzatılma ile elde edilen doğrular da kesişmez, ama kesişmeyen doğrular paralel olmayabilir.

Yukarıdaki durumda eğer $BC = x$ ise, o zaman tanıma göre

$$BCD = \Pi(x).$$

Ayrıca

$$\Pi(-x) = \pi - \Pi(x).$$

O zaman

$$\Pi: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi),$$

ve Π örten ve kesin azalandır, dolayısıyla süreklidir.

Hilbert'in tanımına göre ışınların bir paralellik sınıfı, bir **uçtur**. Böylece

- paralel ışınların ucu aynıdır,
- paralel olmayan ışınların uçları farklıdır.

Her A noktası ve β ucu için,

- uç noktası A olan,
- ucu β olan

bir ve tek bir ışın vardır. Bu ışın

$$A\beta$$

olarak yazılsın.

Her doğrunun iki ucu vardır. Bir AB doğrusunun uçları, bir γ ucundan farklı olsun. O zaman $AB\gamma$ “sonsuz üçgeni” vardır.

Bu üçgenin

- tabanı, AB doğru parçasıdır;
- sonsuz kenarları, $A\gamma$ ve $B\gamma$ ışınlarıdır;
- A 'daki ve B 'deki açıları, $BA\gamma$ ve $AB\gamma$ 'dır.

Ayrıca $A\gamma$ ve $B\gamma$, bir $A\gamma B$ açısını yaparak sayılabilir, ama bunu kullanmayacağız.

Birkaç teoreminiz vardır. Finalde bunlardan birinin kanıtını isteyebilirim.

1. Eğer sonsuz bir üçgenin tabanı ve bir açısı, başka sonsuz bir üçgenin tabanına ve bir açısına eşit ise, o zaman kalan açılar da eşittir.
2. Eğer sonsuz bir üçgenin açıları, başka sonsuz bir üçgenin açılarına eşit ise, o zaman tabanlar da eşittir.
3. Eğer iki açı, iki dik açıdan küçük ise, o zaman açıları bu iki açiya eşit olan sonsuz bir üçgen vardır. (Dikkat edin: iki açının biri geniş olabilir.)
4. Uç noktası sonsuz bir üçgenin açılarının açıortaylarının kesişim noktası olan ve ucu üçgenin sonsuz kenarlarının ucu olan ışının her noktası, üçgenin sonsuz kenarlarından aynı uzaklıktadır.