

Öklid'in *Porizmalar*'ı için
Derleme'nin
VII. Kitabının
38 Lemmasından
İlk 19 Lemma

İskenderiyeli Pappus
Çeviren David Pierce

24 Eylül 2025

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
mat.msgsu.edu.tr/~dpierce
polytropy.com/geometrilere

Bu çalışma
Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0
Unported Lisansı ile lisanslı.

Lisansın bir kopyasını görebilmek için,
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/>
adresini ziyaret edin ya da mektup atın:

Creative Commons,
444 Castro Street, Suite 900,
Mountain View, California, 94041, USA.

CC BY: David Pierce 

david.pierce@msgsu.edu.tr

İçindekiler

Giriş	6
İzdüşümsel geometri	11
Oran ve orantı	16
Pascal Teoremi	21
Porizmalar	22
Orantıların tanımı	23
Bu metin hakkında	27
 Pappus'tan 19 Lemma	 29
Lemma I	30
İkinci kanıtı	32
Lemma II	34
Lemma III	36
İkinci kanıtı	38
Lemma IV	40
Lemma V	42
Lemma VI	44
Lemma VII	46

Lemma VIII	48
Lemma IX	50
Lemma X	52
Lemma XI	56
Lemma XII	58
Lemma XIII	60
Lemma XIV	62
Lemma XV	64
Lemma XVI	66
Lemma XVII	68
Lemma XVIII	70
Lemma XIX	72
 Ekler	 75
A. Pappus'un Dili	76
Fiiller Sözlüğü	76
Edatlar Sözlüğü	78
Yunan Alfabeti	80
 B. Oranlar ve orantılar	 81

C. Thales, Pappus, ve Desargues	98
Kaynakça	106
<i>Analiz Hazinesi</i> 'nin içindekiler	112

Giriş

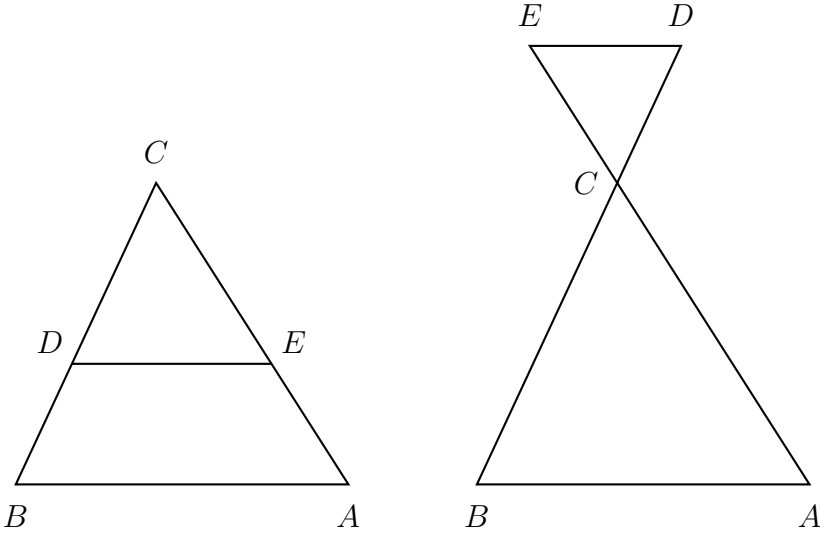
İskenderiyeli Pappus (Πάππος Ἀλεξανδρεύς), M.S. 320 yılı civarında *Derleme* (Συναγωγή) adlı eserini yazdı. *Derleme*'nin yedinci kitabı, *Analiz Hazinesi* (Αναλυόμενος τόπος) adlı eserler için bir rehberdir. *Hazine*'nin içindekiler, şimdi okuduğunuz kitapçığın arka sayfasındadır. (Bu bilgi, [27, s. 564, 598–601] kaynağında bulunur.) Apollonius'un *Koni Kesitleri* ve Öklid'in *Veriler*'i hariç, *Hazine*'nin çoğu şimdi kaybolmuştur. Özel olarak Öklid'in *Porizmalar*'ı (Πορίσματα) kaybolmuştur. Ama onu okumaya yardımcı olmak için, Pappus 38 lemma verir. Bunların ilk 19'nun çevirisi, bu kitapçığı oluşturur.

Bu 19 lemmanın konuları, düzlemde doğru olan üç teoremdir.

Teorem	Pappus'un ilgili lemmaları
Tam Dörtgen	I, II, IV, V, VI, VII
Çapraz Oran	III, X, XI, XIV, XVI, XVIII, XIX
Altıgen	VIII, XII, XIII, XV, XVII

Lemma IX, *sui generis*'tir. Lemma III, X, ve XI, Lemma XII ve XIII için kullanılır. Lemmaların kanıtlarını anlamak için, Öklid'in *Öğeler*'inin

- birinci kitabı,
- beşinci kitabından, orantılar hakkında olan “cebirsel” sonuçlar;
- altıncı kitabından *Thales Teoremi* ve ondan elde edilebilen *Menelaus Teoremi*



Şekil 1.: Thales Teoremi

gerekiyor. Kısaca:

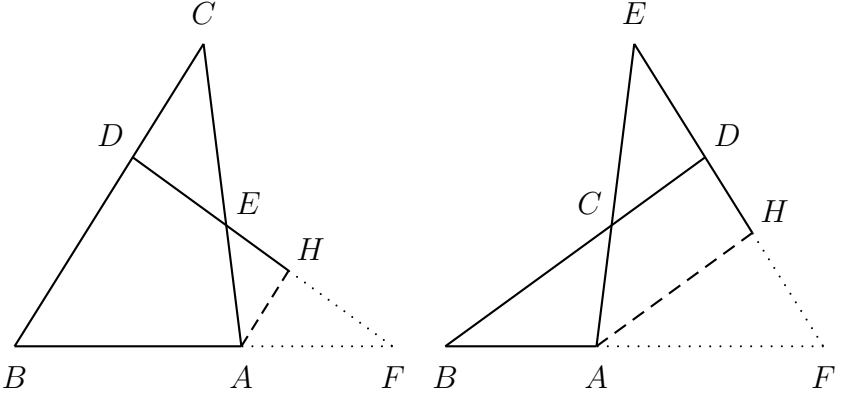
Thales Teoremi. Bir üçgenin tabanına paralel olan bir doğru, üçgenin kenarlarını orantılı bir şekilde keser. Aslında, Şekil 1’de,

$$DE \parallel BA \text{ ise } BD : DC :: AE : EC.$$

Menelaus Teoremi. Bir üçgenin tabanına paralel olmayan bir doğru, kenarları kestiği oranlarından bileşilen oranda tabanı keser. Aslında Şekil 2 ve 3’te,

$$(BD : DC)(CE : EA) :: BF : AF.$$

Pappus’u okumak için, Thales ve Menelaus Teoremini varsayabiliriz, ama bu bölümde ispatlayacağız. Pappus’ta göreceğimiz teoremler, aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.: Menelaus Teoremi, dış bölme

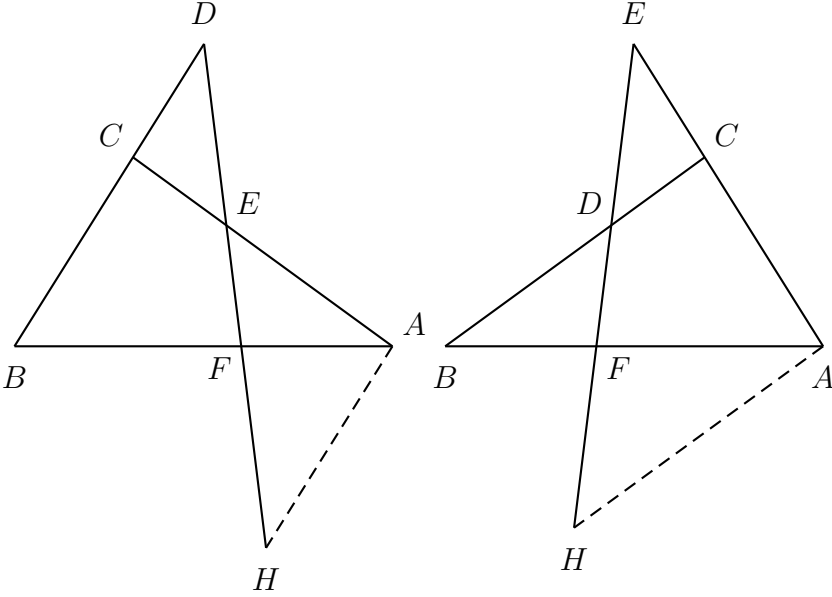
Tam Dörtgen Teoremi. Eğer aynı doğrudaki olmayan dört noktanın ikililerinden geçen altı doğru bir doğruyu keserse, o zaman kesişim noktalarından beşi, altıncıyı belirler. Örneğin Şekil 4'te

- $GHLK$ dörtgeninin köşelerinin ikisinden geçen doğrular, AF doğrusunu A, B, C, D, E , ve F noktalarında keser, ve
- $MNPQ$ dörtgeninin köşelerinin ikisinden geçen beş doğru, sırasıyla A, B, C, D ve E noktalarından geçer, dolayısıyla
- kalan PQ doğrusu, F noktasından geçer.

Çapraz Oran Teoremi. Eğer bir noktadan, aynı doğrudaki olan dört noktanın, başka bir doğrudaki, *izdüşümleri* alınır, noktaların *çapraz oranı* değişmez. Örneğin Şekil 5'te

$$AB \cdot CD : AD \cdot BC :: A_1B_1 \cdot C_1D_1 : AD_1 \cdot B_1C_1.$$

Altıgen Teoremi. Eğer bir altıgenin köşeleri sırayla iki doğrudaki oturursa, o zaman altıgenin karşı kenarlarının ke-

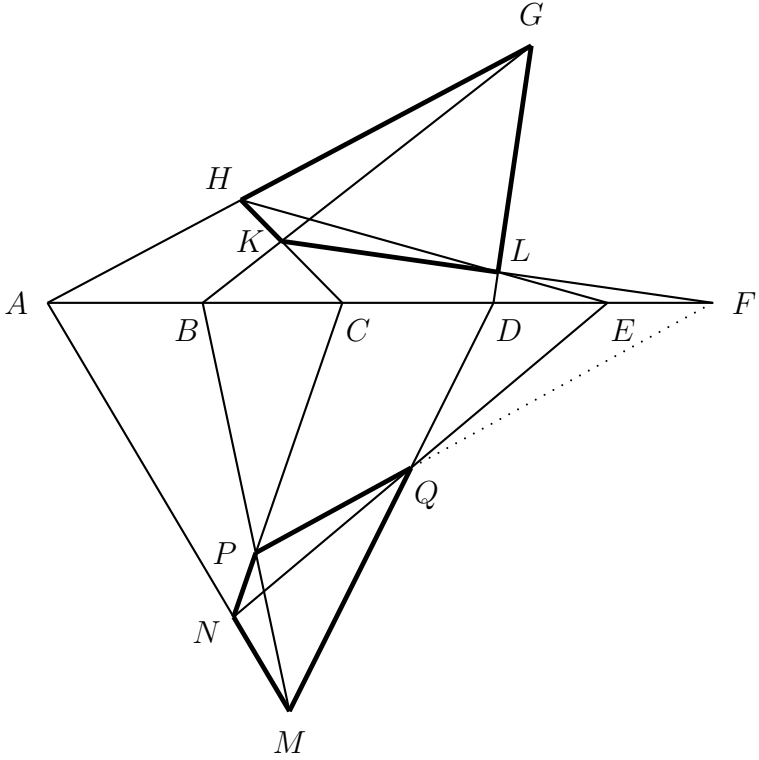


Şekil 3.: Menelaus Teoremi, iç bölme

sişim noktaları da bir doğruda oturur. Örneğin Şekil 6'da

- E noktası, AC doğrusundadır ve
- F noktası, BD doğrusundadır, ve
- $ABCDEF$ altıgeninin karşıt
 - AB ve DE kenarı G' 'de,
 - BC ve EF kenarı H' 'de,
 - CD ve FA kenarı K' 'de
 kesişirler, dolayısıyla
- K noktası, GH doğrusundadır.

Tam Dörtgen, Çapraz Oran, ve Altıgen Teoremi'nin her birinin sadece bir durumunu verdik. Teoremlerde kesişmek yerine iki doğru paralel olabilir. Örneğin eğer Şekil 7'deki gibi



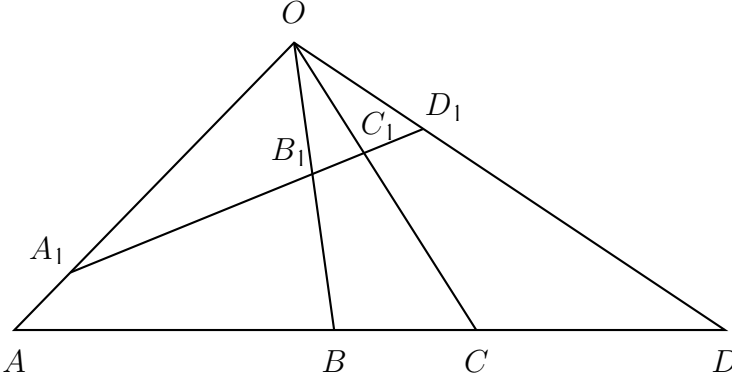
Şekil 4.: Dörtgen Teoremi

$ABCDEF$ altıgeninde karşıt CD ve FA kenarları paralel ise, o zaman bu kenarlar GH 'ye paraleldir. Ayrıca Şekil 8'de,

$$B_1D_1 \parallel AO$$

olduğundan

$$AB \cdot CD : AD \cdot BC :: C_1D_1 : B_1C_1.$$



Şekil 5.: Noktadan izdüşüm

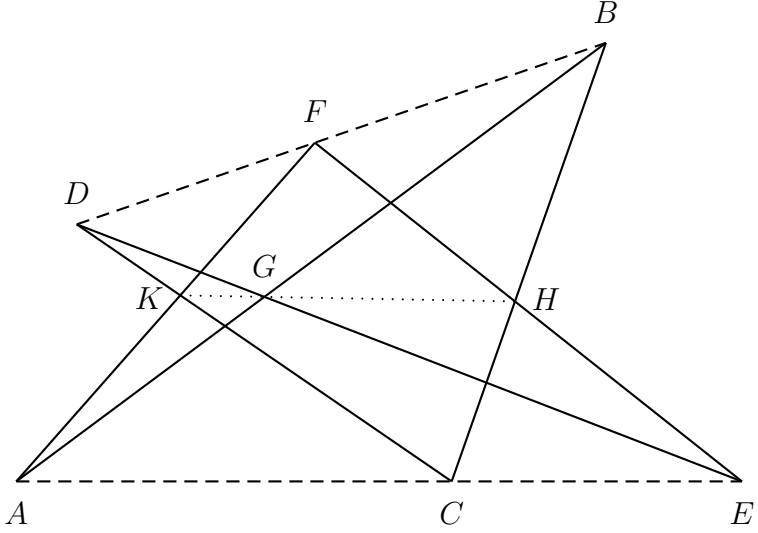
İzdüşümsel geometri

Eğer Altıgen veya Dörtgen Teoremi'nin bir durumunun şekli cama çizilirse, o zaman şeklin gölgesi veya *izdüşümü*, teoremin aynı veya farklı bir durumunun şekli olur. Kısaca teoremlerin her biri, **izdüşümsel** (veya *projektif*) **düzlem geometrisinin** bir teoremidir. Ayrıca *izdüşümsel düzlemde* her teoremin tek durumu vardır, çünkü izdüşümsel düzlemde iki doğru her zaman bir noktada kesişir.

Öklid düzleminden izdüşümsel düzlemi elde etmek için, *sonsuzda olan* noktaları ekleriz. Bunları anlamak için, Öklid'in *eşitlik* ve *paralellik* kavramlarına bakarız.

Öklid'in *Öğeler*'inde *eşit* (ἴσος), *aynı* (αὐτός) değildir, ama bir şey, kendisine eşit olarak kabul edilir. Örneğin Kitap I'in Önerme 4'üne göre ABC ve DEF üçgeninde, eğer Şekil 9'daki gibi

$$AB = DE, \quad BC = EF, \quad \angle ABC = \angle DEF$$



Şekil 6.: Altıgen Teoremi

ise, o zaman

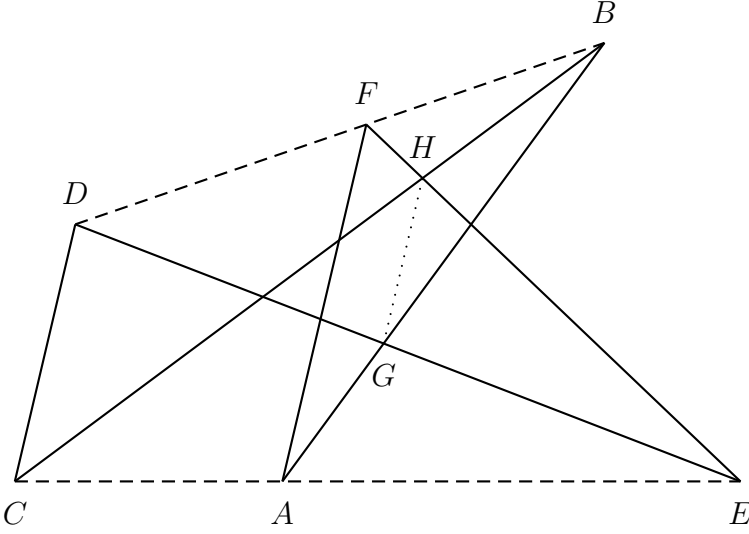
$$\begin{aligned} AC &= DF, & \triangle ABC &= \triangle DEF, \\ \angle BCA &= \angle EFD, & \angle CAB &= \angle FDE. \end{aligned}$$

Önerme 5'te eğer öyle bir ABC üçgeni verilirse ki $AB = AC$ ise, ve Şekil 10'daki gibi

- AB , öyle bir E noktasına,
- AC , öyle bir F noktasına

uzatılırsa ki $AE = AF$ ise, o zaman $\angle CAE$ ve $\angle BAF$, $\angle BAC$ ile aynı olduğundan birbiriyle aynıdır, dolayısıyla birbirine eşit sayılabilir. Bu durumda

$$CA = BA, \quad AE = AF, \quad \angle CAE = \angle BAF,$$



Şekil 7.: Altıgen Teoremi'nin başka bir durumu

dolayısıyla, Önerme 4 sayesinde,

$$\begin{aligned} CE &= BF, & \triangle CAE &= \triangle BAF, \\ \angle AEC &= \angle AFB, & \angle ECA &= \angle FBA. \end{aligned}$$

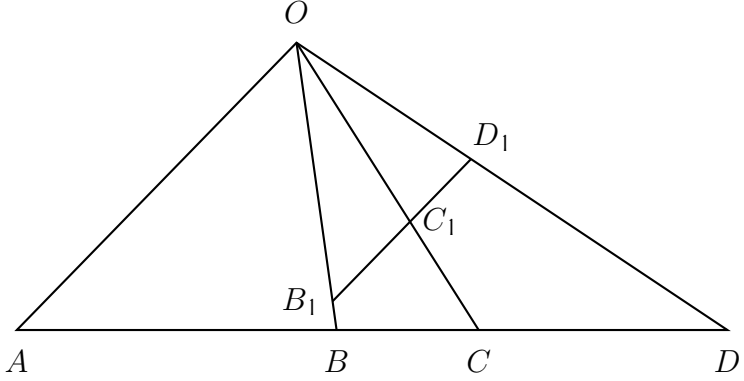
Aynı zamanda $\angle CAE$ ve $\angle BAF$, aynı açıdır. Böylece Öklid için bir açı, kendisine eşit olarak sayılabilir.

Benzer bir şekilde bir doğru, kendisine eşit olarak sayılabilir. Örneğin Önerme 8'e göre ABC ve DEF üçgeninde, eğer Şekil 9'daki gibi

$$AB = DE, \quad BC = EF, \quad AC = DF$$

ise, o zaman

$$\angle ACB = \angle DEF, \quad \angle BAC = \angle EDF, \quad \angle ABC = \angle DEF.$$



Şekil 8.: Noktadan izdüşüm

Önerme 9'da bir BAC açısı verilmiş olduğunda, eğer Şekil 11'deki gibi $AB = AC$ ise, ve eşkenar BCD üçgeni inşa edilirse, o zaman ABD ve ACD üçgenlerinde

$$AB = AC, \quad BD = CD,$$

ve ayrıca AD ortak olduğundan kendisine eşit sayılır, dolayısıyla, Önerme 8 sayesinde,

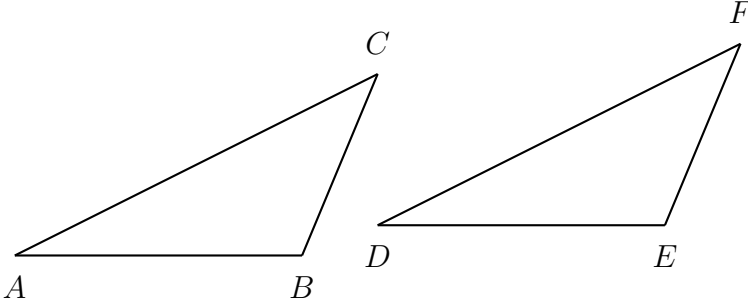
$$\angle BAD = \angle CAD.$$

Bu şekilde bir açı ikiye bölünür.

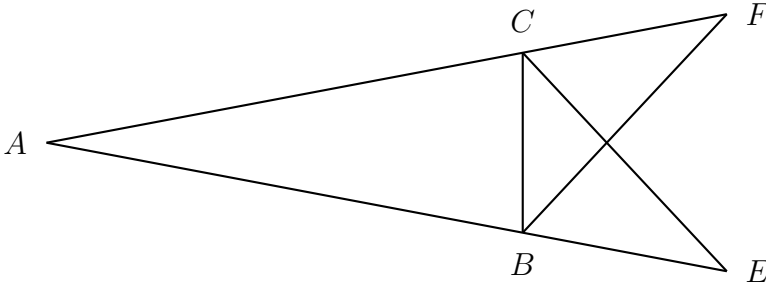
Kısaca açıların ve doğruların eşitliği, yansımali bir bağıntıdır. Öklid için eşitliğin simetrik olduğu açıktır. Ortak bir kavram sayesinde aynı şeye eşit olanlar birbirine eşit olduğundan, eşitlik geçişlidir. Böylece eşitlik bir denklik bağıntısıdır.

Benzer bir şekilde bir doğru, kendisine paralel olarak sayılabilir. O zaman Öklid'in *Öğeler*'inin Kitap I'inin

Önerme 31'i sayesinde verilen bir noktadan geçen, verilen bir doğruya paralel olan bir doğru çizilebilir;



Şekil 9.: Öklid I.4 ve 8



Şekil 10.: Öklid I.5

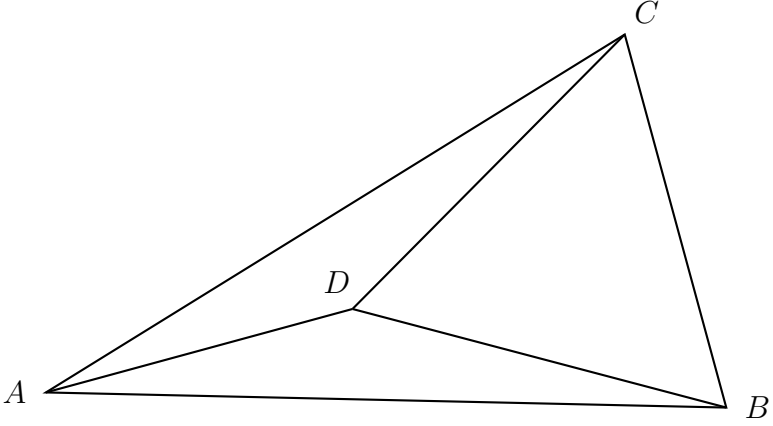
Önerme 29'una göre aynı noktadan geçen, aynı doğruya paralel olan başka bir doğru yoktur;

Önerme 30'una göre aynı doğruya paralel olan doğrular birbirine de paraleldir.

Bundan dolayı paralellik, bir denklik bağıntısıdır.

Doğruların her paralellik sınıfı için, Öklid düzlemine yeni bir nokta ekleyebiliriz. Eklenen nokta, **sonsuzdadır**, ve paralellik sınıfındaki doğrular, bu sonsuzda olan noktada kesişir.

Tüm sonsuzda olan noktalar, **sonsuzdaki doğruyu** oluşturur. Öklid düzleminin noktaları ve sonsuzda olan noktalar,



Şekil 11.: Öklid I.9

izdüşümsel düzlemin noktalarıdır, ve Öklid düzleminin doğruları ve sonsuzdaki doğru, izdüşümsel düzlemin doğrularıdır. İzdüşümsel düzlemde Altıgen ve Dörtgen teoremlerinden her birinin tek bir durumu vardır.

Oran ve orantı

Pappus, Altıgen ve Dörtgen teoremlerini Öklid düzleminde kanıtlar, ve bunun için *alanlar* ve *orantılar* kullanır.

Açılar ve doğrular için gördüğümüz gibi eşitlik, bir denklik bağıntısıdır.

- Sınırlanmış bir doğrunun eşitlik sınıfı, doğrunun **uzunluğudur**.
- Sınırlanmış bir yüzeyin eşitlik sınıfı, yüzeyin **alanıdır**.
- Sınırlanmış bir cismin eşitlik sınıfı, cismin **hacimidir**.

Her sınırlanmış doğru, yüzey, veya cisim, bir **büyüküktür** (τὸ

μεγέθος). Cinsi aynı olan iki büyüklüğün **oranı** (ὁ λόγος) vardır. Eğer büyüklüklerin birinin yerini eşit bir büyüklük konulursa, oran değişmez. Bu şekilde iki uzunluğun, alanın, veya hacmin oranı vardır.

Oranların soyut kuramı, *Öğeler*'in Kitap V'indedir. Öklid'in tanımladığı her oranı, pozitif gerçel sayı olarak görebileceğiz.

Aslında Öklid, oranları değil, sadece büyüklüklerin *oranının aynı* (ἀνάλογον) olmasını tanımlar. Öklid'in tanımı aşağıda verilir; şimdilik tanımın sadece kullanacağımız sonuçlarını vereceğiz.

Bir AB doğrusunun, bir $\Gamma\Delta$ doğrusuna oranı vardır. Bu oranı

$$AB : \Gamma\Delta$$

olarak yazacağız; Pappus

$$\text{λόγος ὃν ἔχει ἡ } AB \text{ πρὸς τὴν } \Gamma\Delta \\ (AB\text{'nın } \Gamma\Delta\text{'ya oranı})$$

ifadesini kullanıyor.

Eğer AB ve $\Gamma\Delta$ doğru ise, genişliği AB 'nin uzunluğu olan ve yüksekliği $\Gamma\Delta$ 'nın uzunluğu olan bir dikdörtgen inşa edilebilir, ve bu dikdörtgeni

$$AB \cdot \Gamma\Delta$$

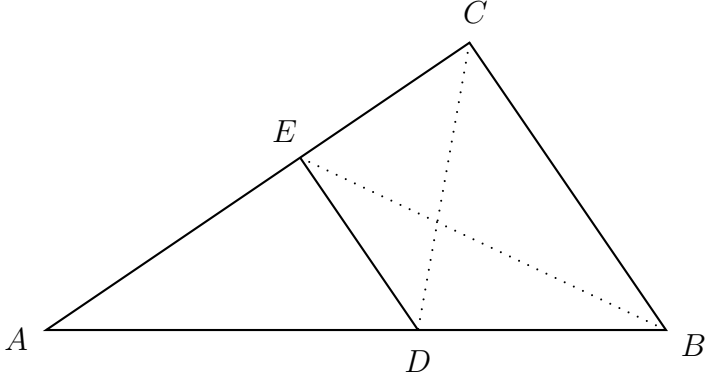
ifadesiyle yazacağız; Pappus

$$\tau\omicron \text{ ὑπὸ } AB \Gamma\Delta \quad (AB \text{ ve } \Gamma\Delta \text{ altındaki})$$

ifadesini kullanıyor. Şimdi $AB \cdot \Gamma\Delta$ dikdörtgeninin, bir $EZ \cdot H\Theta$ dikdörtgenine oranı vardır. Bu oranı

$$AB \cdot \Gamma\Delta : EZ \cdot H\Theta$$

olarak yazacağız.



Şekil 12.: Thales Teoremi

Öğeler'in Kitap I'inin 36. ve 38. önermelerine göre aynı paralellerde olan ve eşit tabanlarda olan iki paralelkenar veya üçgen birbirine eşittir. Tabanlar eşit olmasa bile onların oranı vardır, ve çokgenlerin oranı da vardır, ve Kitap VI'nın ilk önermesine göre bu iki oran aynıdır.

İki oranın aynılığı, bir **orantıdır** (ή ἀναλογία). Eğer böyle bir aynılığı :: işareti ile gösterirsek, o zaman Şekil 12'de

$$\begin{aligned} AD : DB :: ADE : DBE, \\ AE : EC :: ADE : DCE \end{aligned}$$

orantıları vardır. Ayrıca eğer

$$DE \parallel BC$$

ise, o zaman

$$DBE = DCE,$$

ve bu durumda

$$ADE : DBE :: ADE : DCE,$$

dolayısıyla

$$AD : DB :: AE : EC.$$

Bu sonuç ve tersi, Öklid'in Önerme VI.2'sidir, ve bugün ona **Thales Teoremi** denir. Pappus bu teoremi sık sık kullanır.

Şimdi bir

$$A : B :: C : D$$

orantısı verilsin. Oranların aynılığı bir denklik bağıntısı olduğundan

$$C : D :: A : B$$

orantısı da doğrudur. Ayrıca *Öğeler*'in Kitap V'ine göre

- **tersine** (ἀνάπαλιν)

$$B : A :: D : C,$$

- **toplamayla** (συνθέντι)

$$A + B : B :: C + D : D,$$

- **çevirmeyle** (ἀναστρέψαντί) $A > B$ ise

$$A : A - B :: C : C - D,$$

- **izlemeyle** (ἐναλλάξ) A 'nın C 'ye oranı varsa

$$A : C :: B : D.$$

Bir kural daha vardır: **eşitlikten** (δί' ἴσου)

$$\left. \begin{array}{l} A : B :: D : E \\ B : C :: E : F \end{array} \right\} \text{ ise } A : C :: D : F,$$

ve daha genelde, eğer $A_1, \dots, A_n$ ve $B_1, \dots, B_n$ büyüklükleri verilirse, ve her durumda

$$A_k : A_{k+1} :: B_k : B_{k+1}$$

ise, o zaman eşitlikten

$$A_1 : A_n :: B_1 : B_n.$$

Herhalde Öklid “eşitlikten” diyor çünkü çokluklar olarak A_k ’lerin ve B_k ’lerin sayıları birbirine eşittir.

Tanıma göre $A : B$ ve $B : C$ oranlarının **bileşimi** (συνάπτω fiilinden **συνημμένως**), $A : C$ oranıdır. Eğer

$$B : C :: D : E$$

ise, o zaman $A : C$ oranı, $A : B$ ve $D : E$ oranlarının bileşimiyle aynıdır, ve bu orantıyı

$$A : C :: (A : B)(D : E)$$

biçiminde yazacağız. Örneğin aşağıdaki Lemma I’in iki kanıtında Pappus

ὁ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΖ συνῆπται
 ἔκ τε τοῦ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ
 καὶ τοῦ τῆς ΕΘ πρὸς ΘΗ
 (ΑΔ’nınki ΔΖ’ya bileşir
 ΑΒ’nınkinden ΒΕ’a
 ve ΕΘ’nınkinden ΘΗ’ya)

orantısını yazıyor; bunu

$$ΑΔ : ΔΖ :: (ΑΒ : ΒΕ)(ΕΘ : ΘΗ)$$

olarak yazacağız. Lemma III’te Pappus

τοῦ ὑπὸ ΘΕ ΗΖ
 πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗ ΖΕ συνῆπται

λόγος
 ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ
 καὶ τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΘ
 (ΘΕ ΗΖ altındaki
 ΘΗ ΖΕ altındakine bileşir
 oranı
 ΘΕ'ninkinden ΕΖ'ya
 ve ΖΗ'ninkinden ΗΘ'ya)

orantısını yazıyor; bunu

$$\Theta E \cdot HZ : \Theta H \cdot ZE :: (\Theta E : EZ)(ZH : H\Theta)$$

olarak yazacağız.

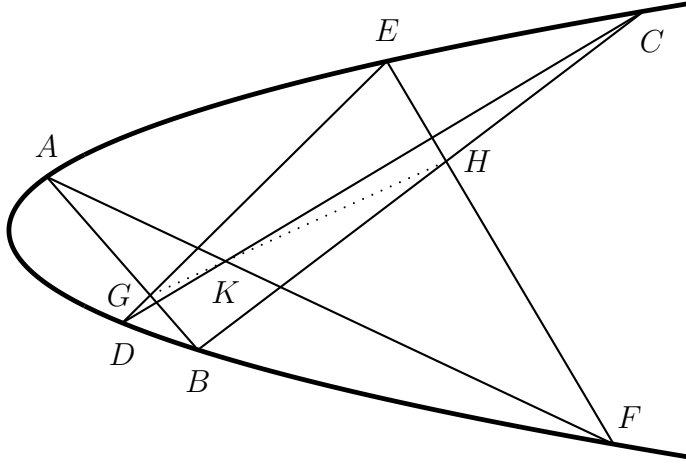
Pascal Teoremi

Altıgen Teoremi'nin daha genel bir biçimi vardır. Bir altıgenin köşeleri bir koni kesitindeyse, karşıt kenarların kesişim noktaları bir doğrudadır. Örneğin Şekil 13'te A, B, C, D, E , ve F noktaları bir parabolde, ve (sonuç olarak) G, H , ve K bir doğrudadır.

Bi altıgenin karşıt kenarlarının kesişmesi için onlar uzatılmak zorunda olabilir. Örneğin Şekil 14'te A, B, C, D, E , ve F noktaları bir hiperbolün dallarındadır, ve (sonuç olarak) G, H , ve K bir doğrudadır.

Dediğimiz gibi, bir altıgenin karşıt kenarları paralel olabilir. Örneğin Şekil 15'te, AF ve CD birbirine paralel ise, o zaman GH de onlara paraleldir.

Altıgen Teoremi'nin genel biçimine **Pascal Teoremi** denir, çünkü Blaise Pascal 1640 yılında, 16 yaşında, teoremi bildirdi. (Pascal'ın orijinali, [25] kaynağındadır; İngilizce çevirisi, [22, s. 326–30] ve [24, s. 163–8] kaynaklarındadır.)



Şekil 13.: Parabolde Altıgen Teoremi

Porizmalar

Proklus'a göre **porizma** (τὸ πόρισμα) sözcüğünün iki anlamı vardır ([21, s. 236] veya [26, s. 478–81] kaynaklarından).

1. Birinci anlamına göre bir porizma, kanıtının başka bir önermenin kanıtından kolayca çıktığı bir önermedir.

2. İkinci anlamına göre bir porizma, önermelerin üçüncü bir çeşitidir:

bir teoremden bir şey *görülüyor*;

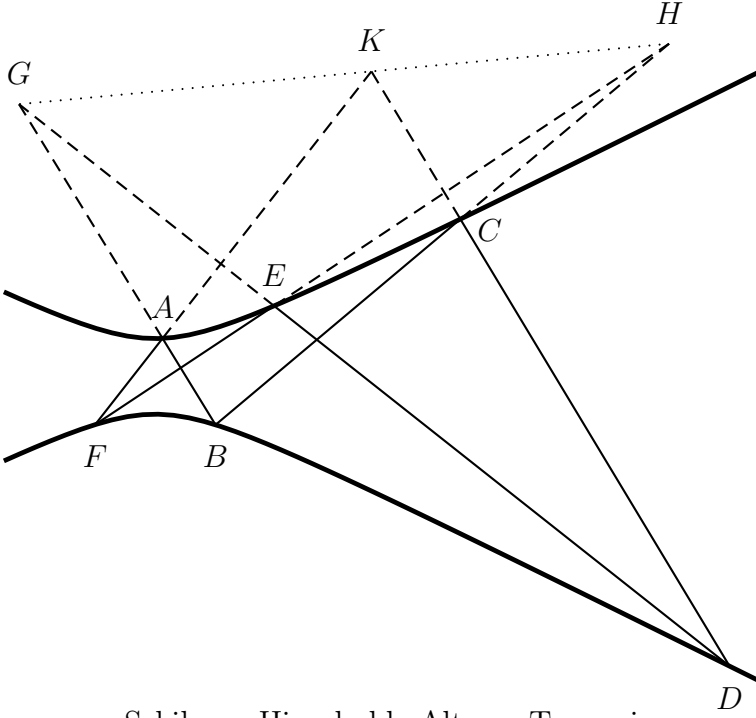
bir problemde bir şey *yapılıyor*;

bir porizmada bir şey *bulunuyor*.

Örneğin

- ikizkenar bir üçgenin tabanındaki açılarının eşitliği bir teoremdir;
- verilen açığı ikiye bölmek bir problemdir;
- bir dairenin merkezini bulmak bir porizmadır.

Öklid'in *Öğeler*'inin Kitap VII'nin Önerme 2'sinde, birbirine



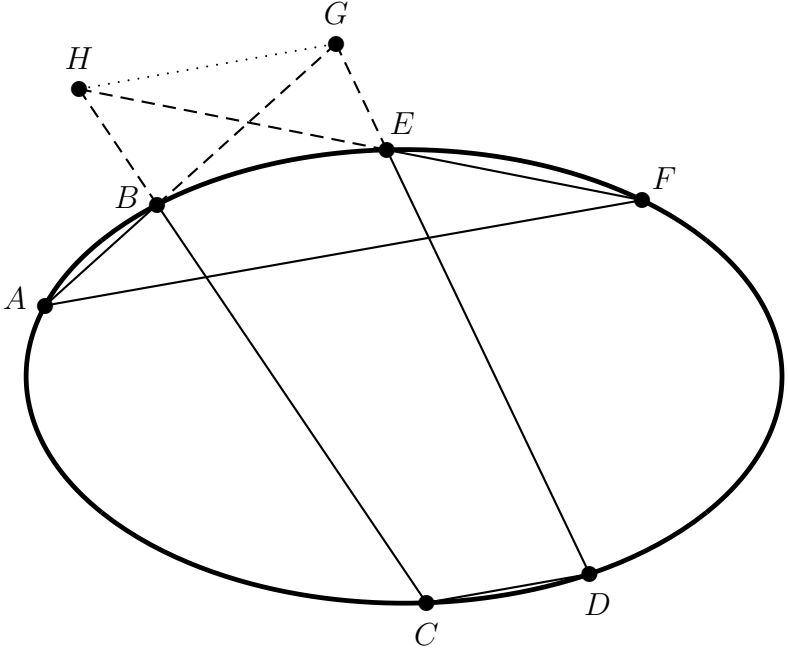
Şekil 14.: Hiperbolde Altıgen Teoremi

asal olmayan iki sayının en büyük ortak böleni bulunur. Bu şekilde o önerme bir porizmadır, ve bundan birinci anlamıyla bir porizma çıkar: birbirine asal olmayan sayıların her ortak böleni, en büyük ortak bölenini böler.

Orantıların tanımı

Bir büyüklüğün **katı** (πολλαπλάσιον) alınabilir. Örneğin A bir büyüklük ise, katları

$$A, \quad A + A, \quad A + A + A, \quad \dots$$



Şekil 15.: Elipste Altıgen Teoremi'nin paralel durumu

toplamlarıdır. Bunlar $A, 2A, 3A, \dots$ olarak yazılabilir. A gibi A 'nın katları, büyüklüktürler. Aslında A 'nın herhangi bir katı

$$kA$$

biçiminde yazılabilir. Buradaki k katsayısı, bir sayma sayısıdır. Sayma sayılarının oluşturduğu küme

$$\mathbb{N}$$

olarak yazılabilir, ve k 'nın sayma sayısı olduğunu göstermek için

$$k \in \mathbb{N}$$

ifadesini yazarız; ama Öklid bunun gibi ifadeler kullanmaz. Öklid için k ifademiz, isim değil, sıfat olurdu. Aslında *Öğeler*'in yedinci kitabındaki tanıma göre bir *sayı* (ὁ ἀριθμός), *birimlerin* (τὰ μονάδα) oluşturduğu bir *çokluktur* (τὸ πλῆθος):

Ἀριθμὸς δὲ
τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

Bir sayı da
birimlerin oluşturduğu bir çokluktur.

Bu tanıma göre bir kA katının kendisi bir sayıdır. Öklid için eğer B A 'ya eşit olmayan bir büyüklük ise, o zaman kA ve kB büyüklük olarak birbirine eşit değildir, ama **kat olarak birbirine eşittir**, yani **eşit katlardır** (ἰσάκεις πολλαπλασίαι).

Bazen A ve B büyüklükleri karşılaştırılabilir: A B 'dan büyük veya küçük olabilir, ve (büyüklük olarak) ikisi birbirine eşit olabilir. Sırasıyla

$$A > B, \quad A < B, \quad A = B$$

ifadelerini yazarız. İki büyüklüğün her biri doğru veya her biri yüzey ise, o zaman varsayıma göre büyüklüklerin her birinin diğerinden büyük olan bir katı vardır. Bu varsayıma **Arşimet Aksiyomu** denir, çünkü Arşimet onu yazıp kullandı [1, s. 36]; ama Arşimet'ten önce Öklid onu kullandı. Öklid, M.Ö. 300 civarında çalışıyordu; Arşimet, M.Ö. 212 yılında Siraküza'nın Romalılar tarafından alınmasında öldürüldü.

Eğer iki büyüklük Arşimet Aksiyomunu sağlarsa, o zaman tanıma göre

- büyüklüklerin **oranı** vardır, veya
- büyüklükler, bir **orana** sahiptir.

O halde A ve B 'nin oranının olması için gerek ve yeter bir koşul, bir k sayma sayısı için

$$A < B < kA \quad \text{veya} \quad B < A < kB \quad \text{veya} \quad A = B.$$

Bu durumda bir orana sahip olma, bir denklik bağıntısıdır.

Şimdi A ve B 'nin oranı olsun. $\mathbb{N}$ 'de herhangi k ve m için, eğer

$$mA < kB \quad \text{veya} \quad mA > kB \quad \text{veya} \quad mA = kB$$

ise, o zaman sırasıyla

$$A : B < k : m \quad \text{veya} \quad A : B > k : m \quad \text{veya} \quad A : B :: k : m$$

ifadesini yazalım. Şimdi Γ ve Δ 'nin oranı da olsun. Ayrıca her k ve her m için

- $A : B < k : m$ ise $A : \Gamma < k : m$ varsayalım;
- $A : B > k : m$ ise $A : \Gamma > k : m$ varsayalım;
- $A : B :: k : m$ ise $A : \Gamma :: k : m$ varsayalım.

O zaman Öklid'in tanımına göre

- A 'nın B 'ya oranı, Γ 'nin Δ 'ya oranı ile aynıdır;
- A , B , Γ , ve Δ orantılıdır.

Bu durumda

$$A : B :: \Gamma : \Delta$$

ifadesini yazarız, ama yukarıda gördüğümüz gibi Öklid ve Pappus sadece sözler kullanırlar. Örneğin aşağıdaki Lemma III'de $K\Theta$ 'nın $\Theta\Lambda$ 'ya oranı, $\Theta\Delta \cdot B\Gamma$ 'nin $\Theta B \cdot \Gamma\Delta$ 'ya oranıyla aynıdır, dolayısıyla

$$K\Theta : \Theta\Lambda :: \Theta\Delta \cdot B\Gamma : \Theta B \cdot \Gamma\Delta$$

ifadesini yazıyoruz, ama Pappus

ὥς ἡ ΚΘ πρὸς ἡ ΘΛ,
οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΔ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΒ ΓΔ

(Nasıl ΚΘ ΘΛ'ya olursa
böyle ΘΔ ΒΓ altındaki ΘΒ ΓΔ altındakine olur)

yazıyor.

Pappus'un metninin bulunduğu el yazmasında, kısaltmalar kullanılır, ama matematik kavramları değil, sadece sözcükler için [19, p. 28–9].

Bugün k ve m 'nin oranı, k/m veya

$$\frac{k}{m}$$

pozitif kesirli sayısı olarak anlaşılabilir. Eğer bir α oranı, iki sayının oranı değilse, o zaman α , pozitif kesirli sayıları iki parçaya keser. Bu parçaların elemanları, sırasıyla

- 1) α 'dan küçük olanlar ve
- 2) α 'dan büyük olanlardır.

Tabii ki ilk parçanın her elemanı, ikinci parçanın her elemanından küçüktür.

Richard Dedekind'in açıkladığı gibi, eğer kesirli sayılar iki boş olmayan parçaya kesilirse, ve ilk parçanın her elemanı, ikinci parçanın her elemanından küçük ise, o zaman bu *kesimi*, bir gerçel sayı olarak anlaşılabilir, ve tüm gerçel sayılar bu şekilde tanımlanabilir [4].

Bu metin hakkında

Aşağıdaki çeviri için Hultsch'un [18] edisyonunu kullandım. Sadece bittikten sonra Jones'un [19] edisyonunu bulup onunla yaptığımı düzelttim.

Derleme'nin Kitap VII'sinde iki sıra vardır. Birinde 321 bölüm vardır; diğesinde 238 önerme vardır. Hultsch her sıra için Arap rakamlarını kullanır. Ayrıca Öklid'in *Porizmalar*'ı hakkındaki lemmalara Romen rakamları koyar. Yukarıda bahsettiğimiz gibi Pappus, oran ve orantılar için özel işaretler kullanmaz. Lemmaların kanıtlarını “*Kanıt*” ve $\square$ arasına yazıyorum; Pappus bunun gibi ifadeler kullanmaz.

Dizgi için L^AT_EX yazılımını ve KOMA-Script *scrbook documentclass*'ını kullandım. Diyagramları, *pstricks* ve *pst-eucl package*'ları ile çizdim. Kullandığım Yunan fontu, Yunan Font Derneği'nin *gfsneohellenic* fontudur.

Öklid'in *Porizmalar*'ı için
Derleme'nin
VII. Kitabının
38 Lemmasından
İlk 19 Lemması

Lemma I (Önerme 127)

193. Diyagram $AB\Gamma\Delta EZH$ olsun, ve

$$AZ : ZH :: A\Delta : \Delta\Gamma$$

olsun, ve ΘK birleştirilmiş olsun. O zaman

$$\Theta K \parallel A\Gamma.$$

Kanıt. Z 'dan $B\Delta$ 'ya paralel olan $Z\Lambda$ ilerletilmiş olsun. Dolayısıyla

$$AZ : ZH :: A\Delta : \Delta\Gamma$$

olduğundan tersine ve toplamayla ve izlemeyle (ve paralellerden)

$$\underbrace{\Delta A : AZ}_{BA : A\Lambda} :: \Gamma A : AH.$$

Böylece

$$\Lambda H \parallel B\Gamma.$$

Böylece (paralellerden)

$$EB : B\Lambda :: \begin{cases} EK : KZ \\ E\Theta : \Theta H. \end{cases}$$

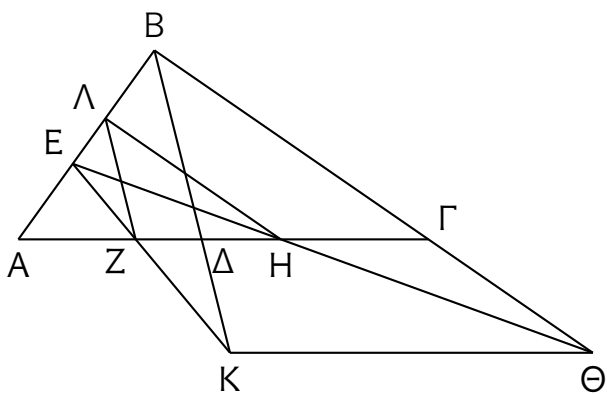
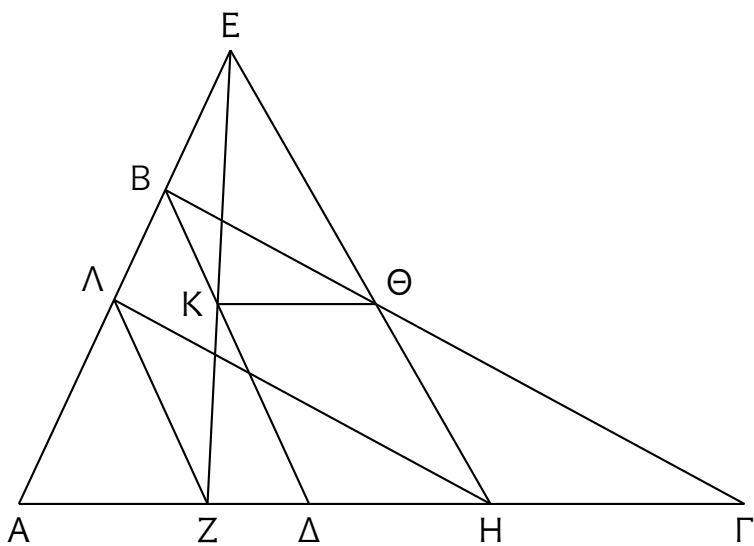
Böylece

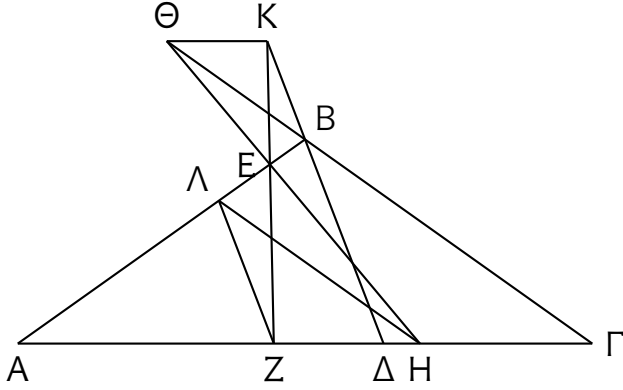
$$EK : KZ :: E\Theta : \Theta H.$$

Böylece

$$\Theta K \parallel A\Gamma.$$

□





194. *Bileşik oranları kullanan kanıt.*

$$AZ : ZH :: A\Delta : \Delta\Gamma$$

olduğundan, tersine

$$HZ : ZA :: \Gamma\Delta : \Delta A.$$

Toplamayla ve izlemeyle ve çevirmeyle

$$A\Delta : \Delta Z :: A\Gamma : \Gamma H.$$

Ama

$$A\Delta : \Delta Z :: (AB : BE)(E\Theta : \Theta H),$$

böylece

$$(AB : BE)(EK : KZ) :: (AB : BE)(E\Theta : \Theta H).$$

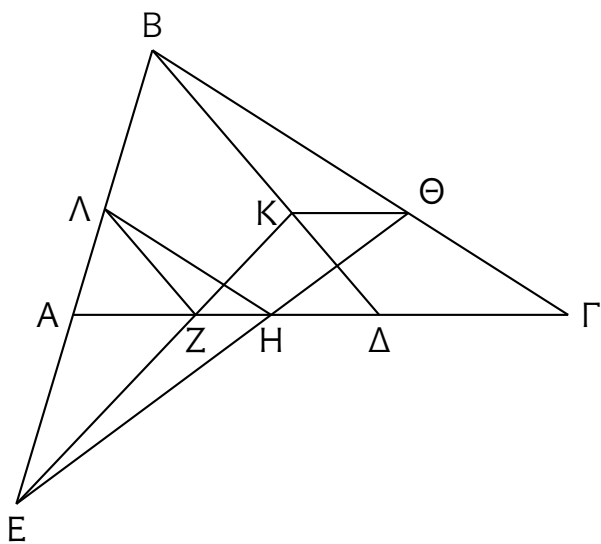
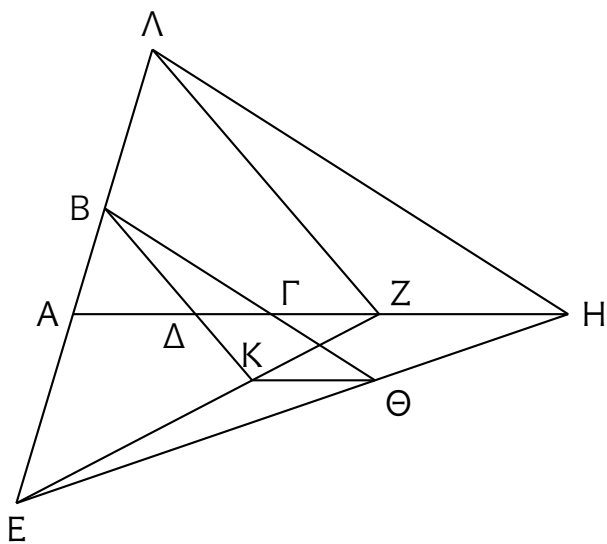
Ortak $AB : BE$ oranı kovulmuş olsun. Böylece kalan

$$EK : KZ :: E\Theta : \Theta H.$$

Böylece

$$\Theta K \parallel A\Gamma.$$

□



Lemma II (Önerme 128)

195. Diyagram $AB\Gamma\Delta EZH\Theta$ [olsun], ve AZ ΔB 'ya paralel olsun, ve

$$AE : EZ :: \Gamma H : HZ$$

[olsun]. O zaman

Θ , K , ve Z 'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt. H 'dan ΔE boyunca $H\Lambda$ ilerletilmiş olsun, ve birleştirilmiş olan ΘK Λ 'ya uzatılmış olsun.

$$AE : EZ :: \Gamma H : HZ$$

olduğundan, izlemeyle

$$AE : \Gamma H :: EZ : ZH.$$

Ayrıca

$$AE : \Gamma H :: E\Theta : H\Lambda$$

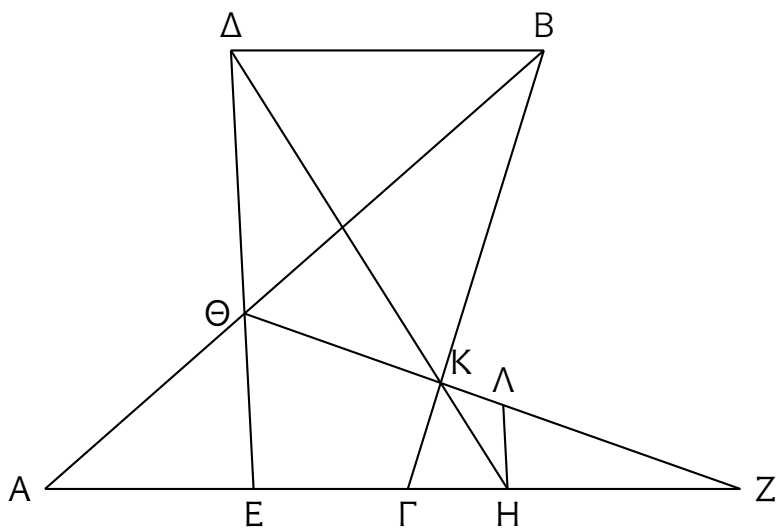
(çünkü iki doğru iki doğruya paralel, ve izlemeyle). Böylece

$$EZ : ZH :: E\Theta : H\Lambda.$$

Ayrıca $E\Theta$ $H\Lambda$ 'ya paraleldir. Böylece

Θ , Λ , Z 'dan [geçen çizgi] doğrudur,

yani Θ , K , Z 'dan. □



Lemma III (Önerme 129)

196. Üç doğru AB , ΓA , ve ΔA üzerine iki doğru ΘE ve $\Theta \Delta$ sürdürülmüş olsun. O zaman

$$\Theta E \cdot HZ : \Theta H \cdot ZE :: \Theta B \cdot \Delta \Gamma : \Theta \Delta \cdot B\Gamma.$$

Kanıt.

- Θ 'dan geçen ve $Z\Gamma A$ 'ya paralel olan $K\Lambda$ ilerletilmiş olsun, ve ΔA ve AB bununla kesişmiş olsun K ve Λ noktalarında;
- Λ 'dan da geçen ve ΔA 'ya paralel olan ΛM de [ilerletilmiş olsun], ve $E\Theta$ ile kesişmiş olsun M 'de.

Dolayısıyla,

$$EZ : ZA :: E\Theta : \Theta \Lambda,$$

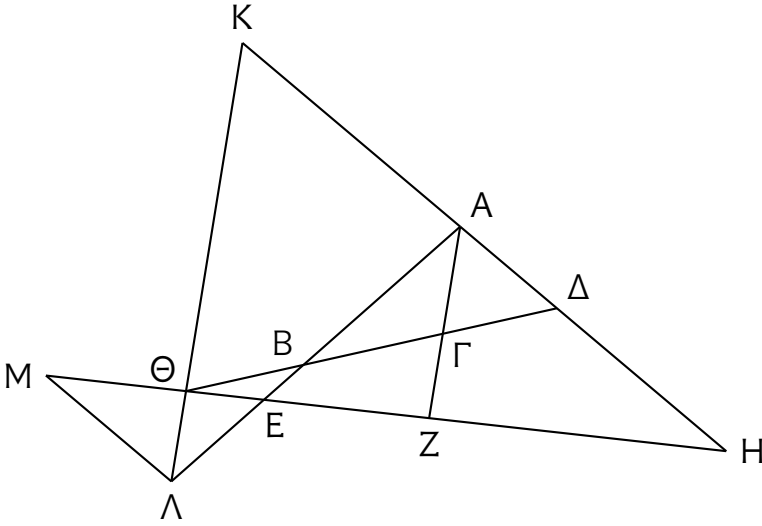
$$AZ : ZH :: \Theta \Lambda : \Theta M$$

(çünkü ikisi, $\Theta K : \Theta H$ ile aynı, paralellerden), [ve bunlar] olduğundan, böylece eşitlikten

$$EZ : ZH :: E\Theta : \Theta M.$$

Böylece

$$\Theta E \cdot HZ = EZ \cdot \Theta M.$$



$EZ \cdot \Theta H$ da başka rasgele bir [çarpımdır]. Böylece

$$\begin{aligned} E\Theta \cdot HZ : EZ \cdot H\Theta &:: EZ \cdot \Theta M : EZ \cdot H\Theta \\ &:: \Theta M : \Theta H \\ &:: \Lambda\Theta : \Theta K. \end{aligned}$$

Aynı [şekil]de

$$K\Theta : \Theta\Lambda :: \Theta\Delta \cdot B\Gamma : \Theta B \cdot \Gamma\Delta.$$

Böylece tersine

$$\Lambda\Theta : \Theta K :: \Theta B \cdot \Gamma\Delta : \Theta\Delta \cdot B\Gamma.$$

Ve

$$\Lambda\Theta \cdot \Theta K :: E\Theta \cdot HZ : EZ \cdot H\Theta$$

gösterilmiş oldu. Ve böylece

$$E\Theta \cdot HZ : EZ \cdot H\Theta :: \Theta B \cdot \Gamma\Delta : \Theta\Delta \cdot B\Gamma. \quad \square$$

197. Bileşik oranları kullanan kanıt.

$$\begin{aligned}\Theta E \cdot HZ : \Theta H \cdot ZE &:: (\Theta E : EZ)(ZH : H\Theta), \\ \Theta E : EZ &:: \Theta\Lambda : ZA, \\ ZH : H\Theta &:: ZA : \Theta K\end{aligned}$$

olduğundan, böylece

$$\Theta E \cdot HZ : \Theta H \cdot EZ :: (\Theta\Lambda : ZA)(ZA : \Theta K).$$

Ayrıca

$$(\Theta\Lambda : ZA)(ZA : \Theta K) :: \Theta\Lambda : \Theta K.$$

Böylece

$$\Theta E \cdot HZ : \Theta H \cdot ZE :: \Theta\Lambda : \Theta K.$$

Aynı [sebepler]le

$$\Theta\Delta \cdot B\Gamma : \Theta B \cdot \Gamma\Delta :: \Theta K : \Theta\Lambda.$$

Ve tersine

$$\Theta B \cdot \Gamma\Delta : \Theta\Delta \cdot B\Gamma :: \Theta\Lambda : \Theta K.$$

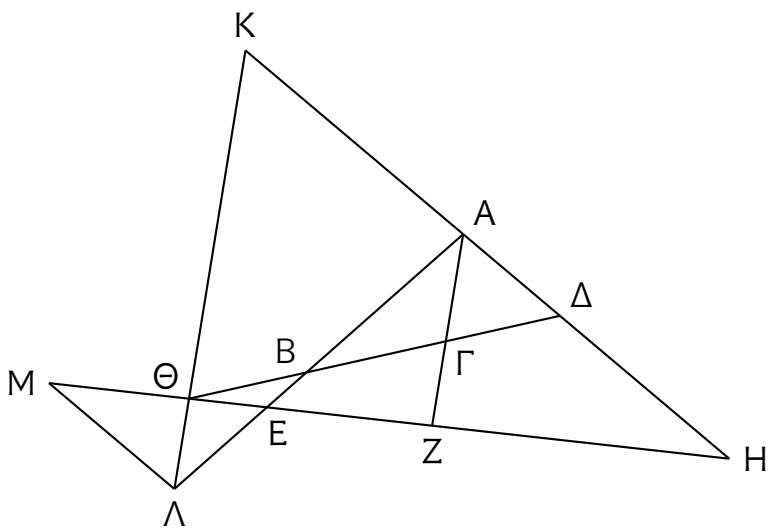
Ama

$$\Theta E \cdot ZH : \Theta H \cdot ZE :: \Theta\Lambda : \Theta K$$

oldu. Ve böylece

$$\Theta E \cdot ZH : \Theta H \cdot ZE :: \Theta B \cdot \Gamma\Delta : \Theta\Delta \cdot B\Gamma.$$

□



Lemma IV (Önerme 130)

198. Diyagram $AB\Gamma\Delta EZH\Theta K\Lambda$ [olsun], ve

$$AZ \cdot B\Gamma : AB \cdot \Gamma Z :: AZ \cdot \Delta E : A\Delta \cdot EZ$$

olsun. O zaman

Θ , H , ve Z noktalarından [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt. $AZ \cdot B\Gamma : AB \cdot \Gamma Z :: AZ \cdot \Delta E : A\Delta \cdot EZ$ olduğundan izlemeyle

$$\underbrace{AZ \cdot B\Gamma : AZ \cdot \Delta E}_{B\Gamma : \Delta E} :: AB \cdot \Gamma Z : A\Delta \cdot EZ.$$

Ama (eğer K 'dan AZ 'ya paralel olan KM ilerletilmiş ise)

$$\begin{aligned} B\Gamma : \Delta E &:: (B\Gamma : KN)(KN : KM)(KM : \Delta E), \\ AB \cdot \Gamma Z : A\Delta \cdot EZ &:: (BA : A\Delta)(\Gamma Z : ZE). \end{aligned}$$

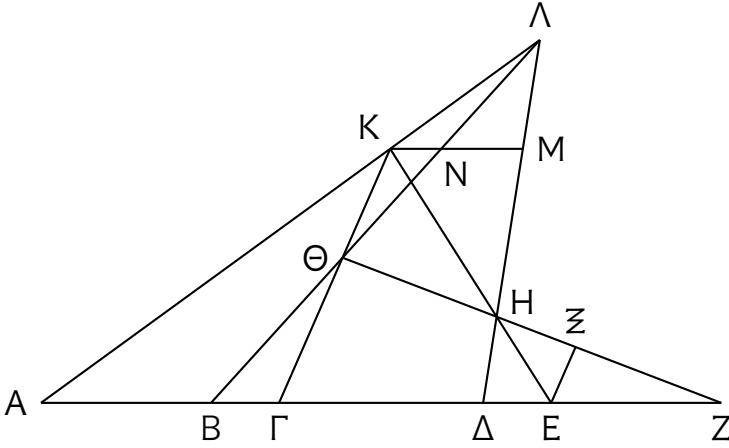
$NK : KM$ ile aynı olan ortak $BA : A\Delta$ kovulmuş olsun. Böylece

$$\text{kalan } \Gamma Z : ZE :: (\underbrace{B\Gamma : KN}_{\Theta\Gamma : K\Theta})(\underbrace{KM : \Delta E}_{KH : HE}).$$

Böylece

Θ , H , ve Z 'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Zira eğer E 'dan $\Theta\Gamma$ 'ya paralel olan $E\Xi$ 'yi ilerlersem, ve birleştirilmiş olan $\Theta H \Xi$ 'ye uzatılmış olursa,



- $KH : HE :: K\Theta : EZ$,
- $(\Gamma\Theta : \Theta K)(\Theta K : EZ)$ bileşimi $\Theta\Gamma : EZ$ oranıyla değiştirilir,
ve

$$\Gamma Z : ZE :: \Gamma\Theta : EZ.$$

$\Gamma\Theta EZ$ 'ye paralel olunca, böylece

Θ , Z , ve Z 'dan [geçen çizgi] doğrudur

(zira bu apaçıktır), öyleyse ayrıca

Θ , H , ve Z 'dan [geçen çizgi] doğrudur. $\square$

Lemma V (Önerme 131)

199. Eğer diyagram $AB\Gamma\Delta EZH\Theta$ ise [ve özel olarak A, H, ve Θ 'dan geçen çizgi doğru ise],

$$A\Delta : \Delta\Gamma :: AB : B\Gamma$$

meydana gelir. Dolayısıyla $A\Delta : \Delta\Gamma :: AB : B\Gamma$ olsun. O zaman

A, H, ve Θ 'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt. H'dan $A\Delta$ 'ya paralel olan $K\Lambda$ ilerletilmiş olsun. Dolayısıyla

$$A\Delta : \Delta\Gamma :: AB : B\Gamma$$

olduğundan, ama

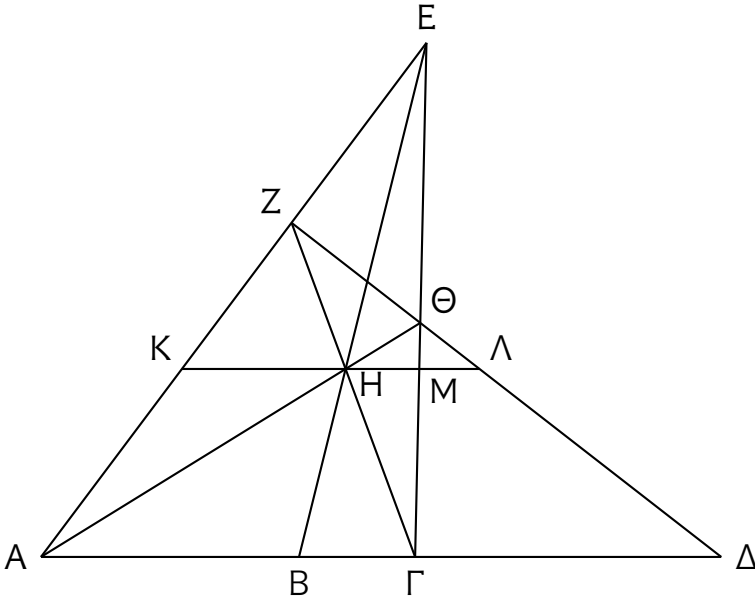
$$\begin{aligned} A\Delta : \Delta\Gamma &:: K\Lambda : \Lambda H, \\ AB : B\Gamma &:: KH : HM \end{aligned}$$

olduğundan, böylece ayrıca

$$K\Lambda : \Lambda H :: KH : HM,$$

ve

$$\begin{aligned} \text{kalan } H\Lambda : \text{kalan } \Lambda M &:: K\Lambda : \Lambda H \\ &:: A\Delta : \Delta\Gamma. \end{aligned}$$



İzlemeyle

$$\begin{aligned} A\Delta : H\Lambda &:: \Gamma\Delta : \Lambda M \\ &:: \Delta\Theta : \Theta\Lambda, \end{aligned}$$

ve $HA \parallel AD$ 'ya paraleldir. Böylece

A , H , ve Θ noktalarından [geçen çizgi] doğrudur;

zira bu apaçıktır.



Lemma VI (Önerme 132)

200. Yine eğer diyagram $[AB\Gamma\Delta EZH]$ ise, ve ΔZ $B\Gamma$ 'ya paralel ise,

$$AB = B\Gamma$$

meydana gelir. Dolayısıyla eşit olsun; o zaman

$$[\Delta Z \ B\Gamma\text{'ya}] \text{ paraleldir.}$$

Kanıt. Olur da. Zira eğer EB 'da HB 'ya eşit olan $B\Theta$ 'yı koyarsam, ve $A\Theta$ ve $\Theta\Gamma$ 'yı birleştirirsem,

paralelkenar $A\Theta\Gamma H$ meydana gelir,

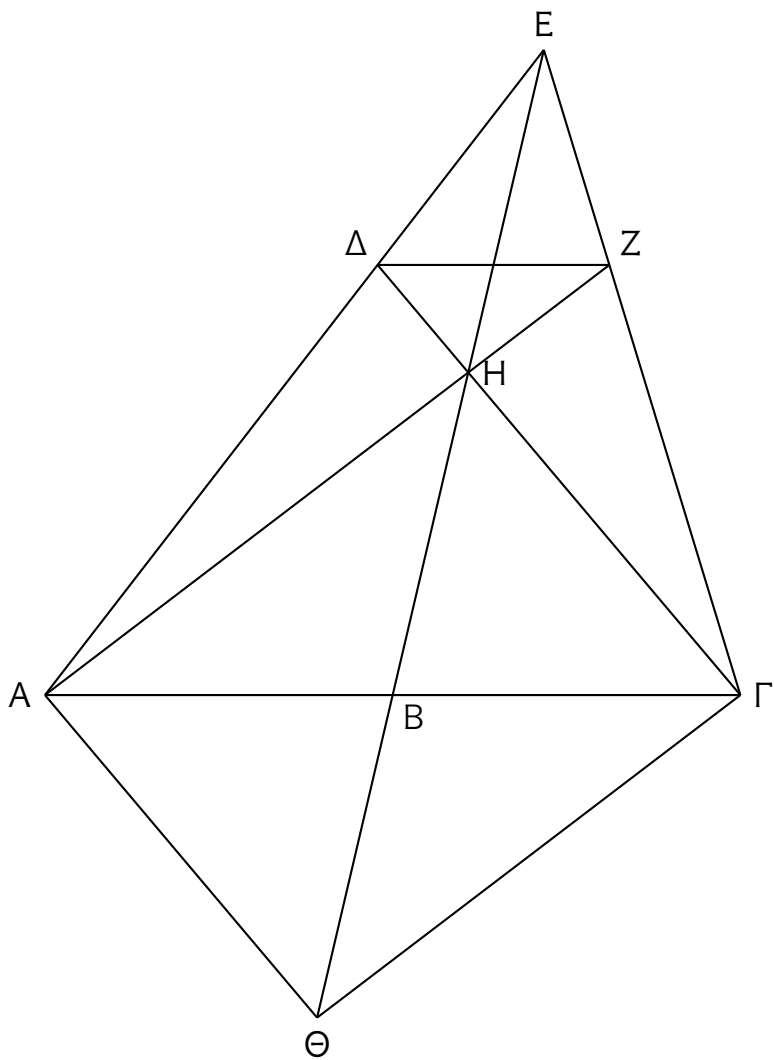
ve bundan

$$A\Delta : \Delta E :: \Gamma Z : ZE$$

(zira söylenmiş [iki oranın] her biri $\Theta H : HE$ oranıyla aynıdır).
Öyleyse

$$\Delta Z \parallel A\Gamma.$$

□



Lemma VII (Önerme 133)

201. Diyagram olsun, ve ΔB ve $B\Gamma$ 'nin orta orantılısı BA olsun ($\tau\tilde{\omega}\nu \Delta B B\Gamma \mu\acute{\epsilon}\sigma\eta \acute{\alpha}\nu\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu \acute{\epsilon}\sigma\tau\omega \acute{\eta} BA$).¹ O zaman

$$ZH \parallel A\Gamma.$$

Kanıt. EB uzatılmış olsun, ve A 'dan ΔZ doğrusuna paralel olan AK ilerletilmiş olsun, ve ΓK birleştirilmiş olsun. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\Gamma B : BA &:: AB : B\Delta, \\ AB : B\Delta &:: KB : B\Theta\end{aligned}$$

olduğundan, ayrıca

$$\Gamma B : BA :: KB : B\Theta.$$

Böylece

$$A\Theta \parallel K\Gamma.$$

Dolayısıyla yine

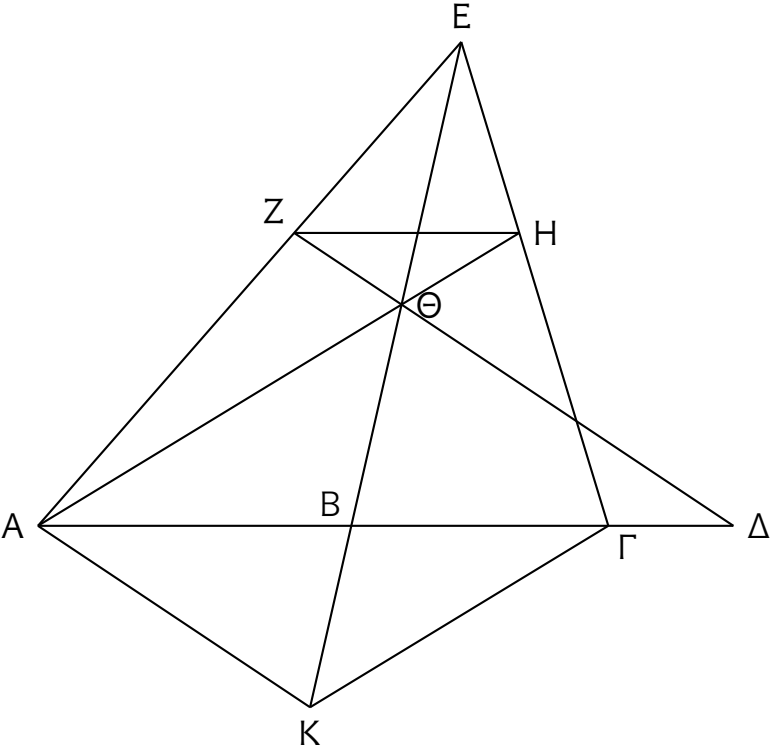
$$AZ : ZE :: \Gamma H : HE$$

(zira her oran $K\Theta : \Theta E$ oranıyla aynıdır). Öyleyse

$$ZH \parallel A\Gamma.$$

□

¹Yani $\Delta B : BA :: BA : B\Gamma$ olsun. *Öğeler* Önerme VI.13'üne bakın. Yunan $\acute{\eta} \mu\acute{\epsilon}\sigma\eta \acute{\alpha}\nu\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$ teriminin İngilizcesi *mean proportional*'dır, örneğin lisede kullandığım geometri ders kitabında [28, s. 239]. Türkçe'de Demirtaş “orta orantılı” kullanır [5, s. 214], ama Atatürk “ortakoran” kullandı [2, s. 35].



Lemma VIII (Önerme 134)

202. Diyagram (δ βωμόςκος “küçük sunak”) $AB\Gamma\Delta EZH$ olsun, ve

ΔE $B\Gamma$ 'ya, ve EH BZ 'ya, paralel olsun.

O zaman

$\Delta Z \parallel \Gamma H$ da.

Kanıt. BE , $\Delta\Gamma$, ve ZH birleştirmiş olsun. Böylece

ΔBE üçgeni $\Delta\Gamma E$ üçgenine eşittir.

Ortak ΔAE üçgeni eklenmiş olsun. Böylece

ABE üçgeninin tümü, $\Gamma\Delta A$ üçgeninin tümüne eşittir.

Yine BZ EH 'ya paralel olduğundan

BZE üçgeni BZH üçgenine eşittir.

Ortak ABZ üçgeni ayrılmış olsun. Böylece

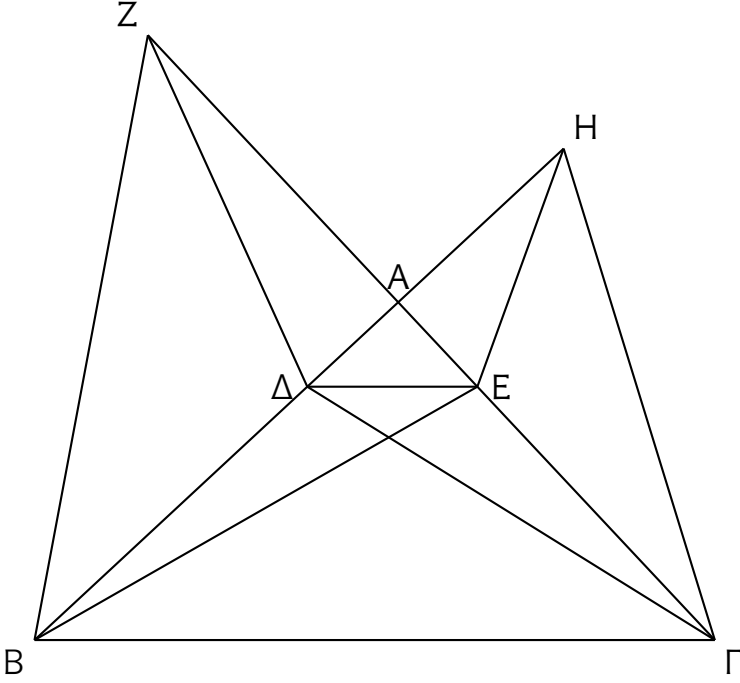
kalan ABE üçgeni, kalan AHZ üçgenine eşittir.

Ama

ABE üçgeni $A\Gamma\Delta$ üçgenine eşittir.

Böylece

$A\Gamma\Delta$ üçgeni de, AHZ üçgenine eşittir.



Ortak $A\Gamma H$ üçgeni eklenmiş olsun. Böylece

$\Gamma\Delta H$ üçgeninin tümü, ΓZH üçgeninin tümüne eşittir.

Ve aynı ΓH tabanındadırlar. Böylece

$$\Gamma H \parallel \Delta Z. \quad \square$$

Lemma IX (Önerme 135)

203. Üçgen $AB\Gamma$ olsun, ve orada $A\Delta$ ve AE sürdürülmüş olsun, ve $B\Gamma$ 'ya paralel olan ZH ilerletilmiş olsun, ve $Z\Theta H$ eğilmiş olsun, ve

$$B\Theta : \Theta\Gamma :: \Delta\Theta : \Theta E$$

olsun. O zaman

$$K\Lambda \parallel B\Gamma.$$

Kanıt. Zira

$$B\Theta : \Theta\Gamma :: \Delta\Theta : \Theta E$$

olduğundan, böylece

$$\text{kalan } B\Delta : \text{kalan } \Gamma E :: \Delta\Theta : \Theta E.$$

Ve

$$B\Delta : E\Gamma :: ZM : NH;$$

böylece ayrıca

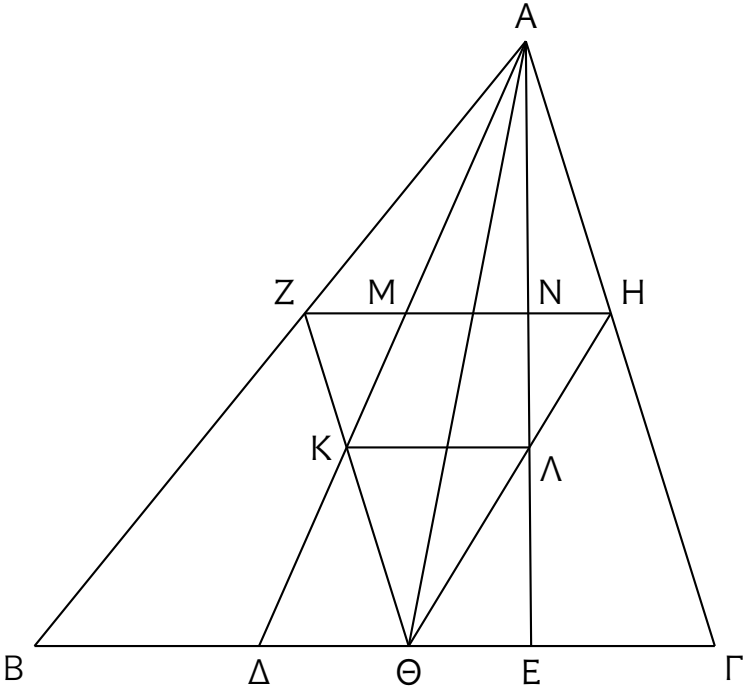
$$ZM : NH :: \Delta\Theta : \Theta E.$$

İzlemeyle

$$ZM : \Delta\Theta :: NH : \Theta E.$$

Ama paralellerden

$$\begin{aligned} ZM : \Delta\Theta &:: ZK : K\Theta, \\ HN : \Theta E &:: H\Lambda : \Lambda\Theta, \end{aligned}$$



ve böylece

$$ZK : K\Theta :: H\Lambda : \Lambda\Theta.$$

Böylece

$$K\Lambda \parallel HZ.$$

öyleyse ΓB 'ya.

□

Lemma X (Önerme 136)

204. İki doğru BAE ve ΔAH üzerine, Θ noktasından geçen iki doğru ΔΘ ve ΘE sürdürülmüş olsun, ve

$$\Delta\Theta \cdot B\Gamma : \Delta\Gamma \cdot B\Theta :: \Theta H \cdot ZE : \Theta E \cdot ZH$$

olsun. O zaman

Γ, A, ve Z'dan geçen [çizgi] doğrudur.

Kanıt.

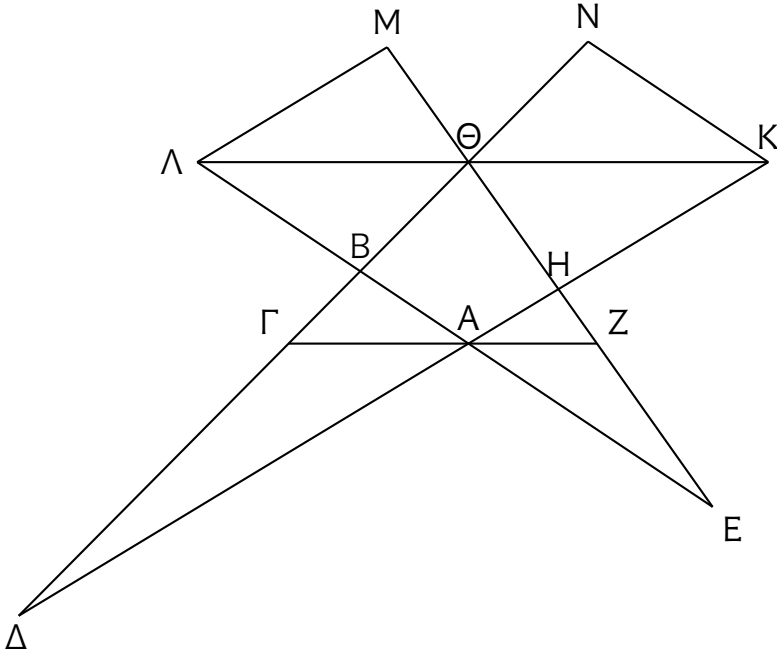
- Θ'dan ve ΓA'ya paralel olan KΛ ilerletilmiş olsun,
- AB ve AΔ ile K ve Λ noktalarında kesişmiş olsun,
- Λ'dan AΔ'ya paralel olan ΛM ilerletilmiş olsun,
- EΘ M'ye uzatılmış olsun,
- K'dan AB'ya paralel olan KN ilerletilmiş olsun,
- ΔΘ N'ye uzatılmış olsun.

Dolayısıyla paralellerden

$$\Delta\Theta : \Theta N :: \Delta\Gamma : \Gamma B$$

olmuş olduğundan, böylece

$$\Delta\Theta \cdot \Gamma B = \Delta\Gamma \cdot \Theta N.$$



$\Delta\Gamma \cdot B\Theta$ da başka rasgele bir [çarpımdır]. Böylece

$$\begin{aligned} \Delta\Theta \cdot B\Gamma : \Delta\Gamma \cdot B\Theta &:: \Gamma\Delta \cdot \Theta N : \Delta\Gamma \cdot B\Theta \\ &:: \Theta N : \Theta B. \end{aligned}$$

Ama

$$\Theta\Delta \cdot B\Gamma : \Delta\Gamma \cdot B\Theta :: \Theta H \cdot ZE : \Theta E \cdot ZH$$

varsayılır, ve

$$\begin{aligned} \Theta N : \Theta B &:: K\Theta : \Theta\Lambda \\ &:: H\Theta : \Theta M & \text{(paralellerden)} \\ &:: \Theta H \cdot ZE : \Theta M \cdot ZE. \end{aligned}$$

Ve böylece

$$\Theta H \cdot ZE : \Theta E \cdot ZH :: \Theta H \cdot ZE : \Theta M \cdot ZE.$$

Böylece

$$\Theta E \cdot ZH = \Theta M \cdot ZE.$$

Ve böylece

$$\Theta M : \Theta E :: HZ : ZE.$$

Toplamayla ve izlemeyle

$$ME : EH :: \Theta E : EZ.$$

Ama

$$ME : EH :: \Lambda E : EA,$$

ve böylece

$$\Lambda E : EA :: \Theta E : EZ.$$

Böylece

$$AZ \parallel K\Lambda.$$

Ama

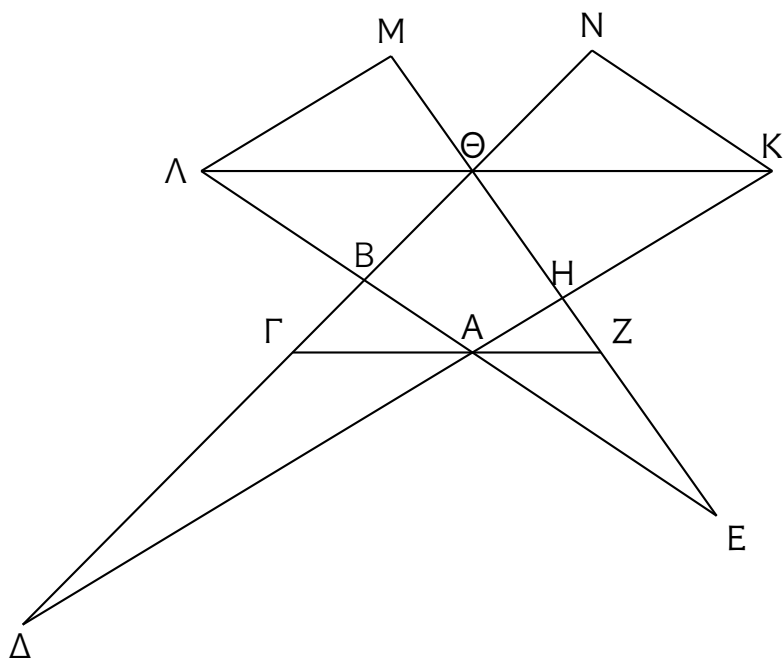
ΓA da $[K\Lambda]$ 'ya paraleldir].

Böylece

ΓAZ doğrudur.

□

Bunun durumları, tersi olan önceden yazılmışları [yani Lemma III'ün durumları] gibidir.



Lemma XI (Önerme 137)

205. Üçgen $AB\Gamma$ [olsun], ve $A\Delta$ $B\Gamma$ 'ya paralel [olsun], ve sürdürülmüş olan ΔE , $B\Gamma$ ile E noktada kesişmiş olsun. O zaman

$$\Delta E \cdot ZH : EZ \cdot H\Delta :: \Gamma B : BE.$$

Kanıt. Γ 'dan AE 'a paralel olan $\Gamma\Theta$ ilerletilmiş olsun, ve AB Θ 'ya uzatılmış olsun. Dolayısıyla

$$\Gamma A : AH :: \Gamma\Theta : ZH,$$

$$\Gamma A : AH :: E\Delta : \Delta H$$

olduğundan, dahi

$$E\Delta : \Delta H :: \Theta\Gamma : ZH.$$

Böylece

$$\Gamma\Theta \cdot \Delta H = E\Delta \cdot ZH.$$

$EZ \cdot H\Delta$ da başka rasgele bir [çarpımdır]. Böylece

$$\Delta E \cdot ZH : \Delta H \cdot EZ :: \Gamma\Theta \cdot \Delta H : \Delta H \cdot EZ$$

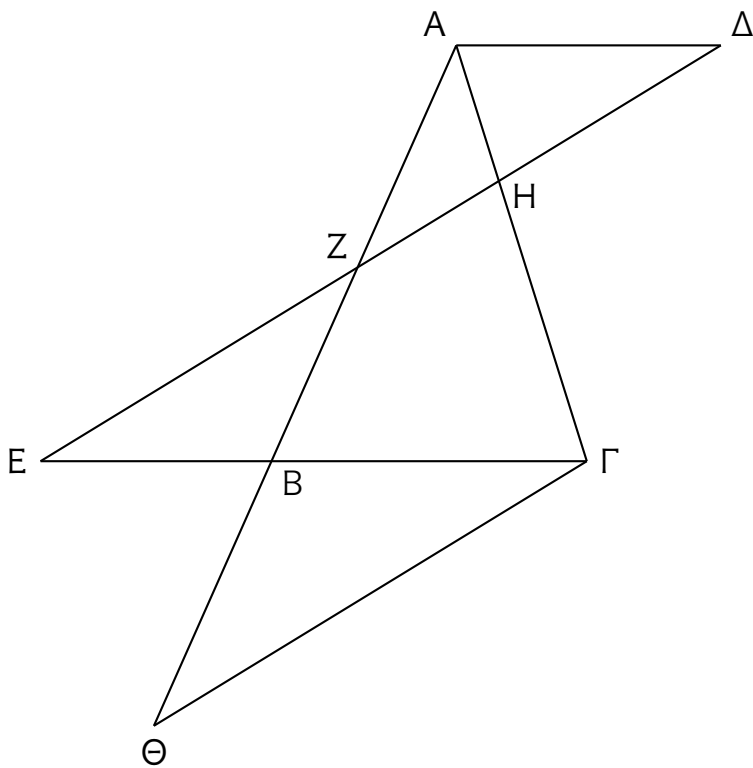
$$:: \Gamma\Theta : EZ$$

$$:: \Gamma B : BE.$$

Dolayısıyla

$$\Delta E \cdot ZH : EZ \cdot H\Delta :: \Gamma B : BE.$$

Eğer $A\Delta$ paraleli diğer tarafa da ilerletilmiş ise, ve ΔE Δ 'dan Γ 'nın ötesine sürdürülmüş ise, aynı şey [doğrudur]. $\square$



Lemma XII (Önerme 138)

206. Bunlar şimdi kanıtlanmış olunca, eğer AB ve $\Gamma\Delta$ paralel ise, ve bunların üzerine bazı doğrular $A\Delta$, AZ , $B\Gamma$, ve BZ düşerse, ve $E\Delta$ ve $E\Gamma$ birleştirilirse, o zaman

H , M , ve K 'dan geçen [çizgi'nin] doğru olduğu gösterilecek.

Kanıt. Zira ΔAZ üçgen olduğundan, ve AE ΔZ 'ya paralel olduğundan, ve ΔZ 'ya Γ 'da düşen $E\Gamma$ sürdürülmüş olduğundan, önceden yazılmışlara göre

$$\Delta Z : Z\Gamma :: \Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E$$

meydana gelir. Yine ΓBZ üçgen olduğundan, ve $\Gamma\Delta$ 'ya paralel olan BE ilerletilmiş olduğundan, ve $\Gamma Z\Delta$ 'ya Δ 'da düşen ΔE sürdürülmüş olduğundan

$$\Gamma Z : Z\Delta :: \Delta E \cdot \Lambda K : \Delta K \cdot \Lambda E$$

meydana gelir. Böylece tersine

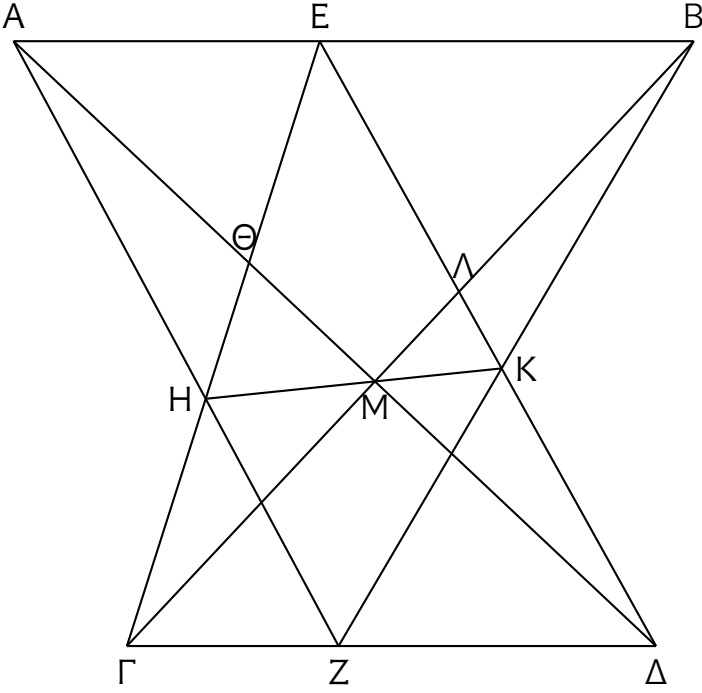
$$\Delta Z : Z\Gamma :: \Delta K \cdot \Lambda E : \Delta E \cdot \Lambda K$$

meydana gelir.

$$\Delta Z : Z\Gamma :: \Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E$$

da oldu. Ve böylece

$$\Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E :: \Delta K \cdot \Lambda E : \Delta E \cdot \Lambda K.$$



Dolayısıyla iki doğru $E\Gamma$ ve $E\Delta$, iki doğru $\Gamma M\Lambda$ ve $\Delta M\Theta$ 'ya sürdürülmüş olduğundan, ve

$$\Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E :: \Delta K \cdot E\Lambda : \Delta E \cdot \Lambda K$$

oldüğundan, böylece

H, M, ve K'dan [geçen çizgi] doğrudur;

zira bu gösterilmiş oldu. □

Lemma XIII (Önerme 139)

207. Ama o halde AB ve $\Gamma\Delta$ paralel olmasın, ama N 'de kesişmiş olsun. O zaman yine

H , M , ve K 'dan geçen [çizgi] doğrudur.

Kanıt. Üç doğru AN , AZ , ve $A\Delta$ üzerine aynı Γ noktasından iki doğru ΓE ve $\Gamma\Delta$ sürdürülmüş olduğundan,

$$\Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H : \Theta E :: \Gamma N \cdot Z\Delta : N\Delta \cdot \Gamma Z$$

meydana gelir. Yine aynı Δ noktasından, üç doğru BN , $B\Gamma$, ve BZ üzerine iki doğru ΔE ve ΔN sürdürülmüş olduğundan

$$N\Gamma \cdot Z\Delta : N\Delta : Z\Gamma :: \Delta K \cdot E\Lambda : \Delta E \cdot K\Lambda.$$

Ama

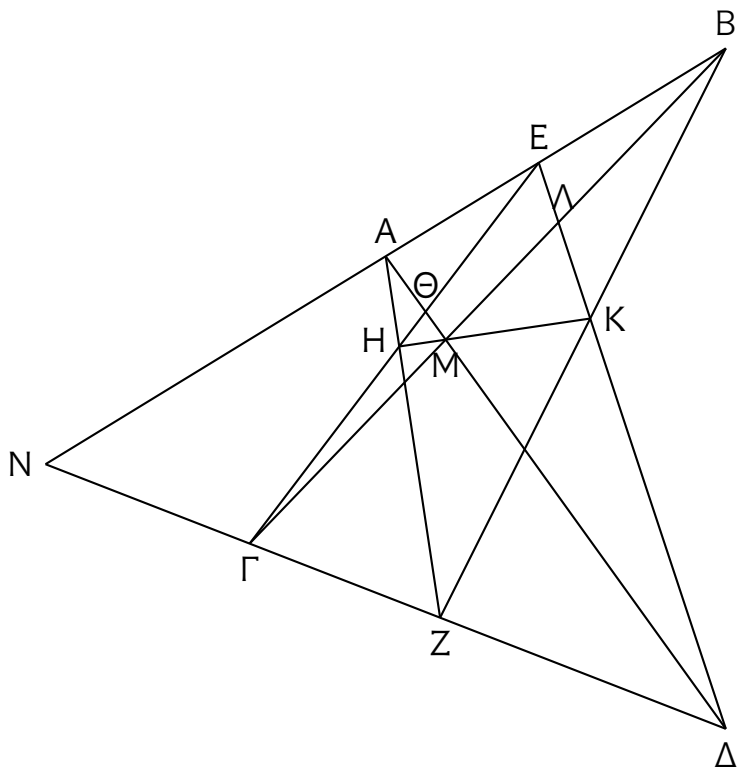
$$N\Gamma \cdot Z\Delta : N\Delta \cdot \Gamma Z :: \Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E$$

gösterilmiş oldu. Ve dolayısıyla

$$\Gamma E \cdot \Theta H : \Gamma H \cdot \Theta E :: \Delta K \cdot E\Lambda : \Delta E \cdot K\Lambda.$$

O halde önceden yazılmışlara göre

H , M , ve K 'dan geçen [çizgi] doğrudur. $\square$



Lemma XIV (Önerme 140)

208. $AB \Gamma \Delta$ 'ya paralel olsun, ve AE ve ΓB sürdürülmüş olsun, ve [öyle] bir nokta BH 'da Z [olsun] ki

$$\Delta E : E\Gamma :: \Gamma B \cdot HZ : ZB \cdot \Gamma H$$

[olsun]. O zaman

A , Z , ve Δ 'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt.

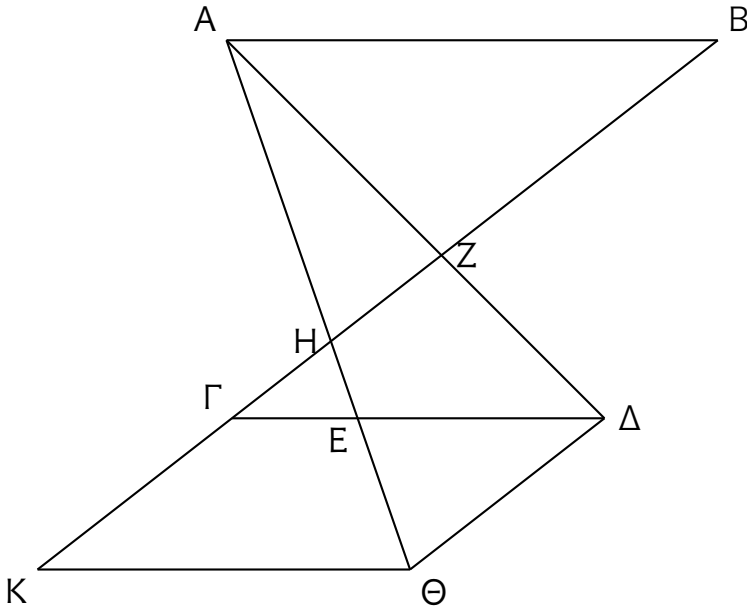
- Δ 'dan $B\Gamma$ 'ya paralel olan $\Delta\Theta$ ilerletilmiş olsun, ve AE Θ 'ya uzatılmış olsun,
- Θ 'dan $\Gamma\Delta$ 'ya paralel olan ΘK [ilerletilmiş olsun], ve $B\Gamma$ K 'ya uzatılmış olsun.

Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\Delta E : E\Gamma &:: \Gamma B \cdot ZH : ZB \cdot \Gamma H, \\ \Delta E : E\Gamma &:: \Delta\Theta : \Gamma H \\ &:: \Delta\Theta \cdot BZ : \Gamma H \cdot BZ\end{aligned}$$

olduğundan, böylece

$$B\Gamma \cdot ZH :: \Delta\Theta \cdot BZ.$$



Böylece

$$\begin{aligned} \Gamma B : BZ &:: \Delta \Theta : HZ \\ &:: \Gamma K : HZ \end{aligned}$$

orantı vardır. Böylece ayrıca

$$\text{KB tümü} : \text{BH tümü} :: \text{K}\Gamma : \text{ZH} \\ :: \Delta\Theta : \text{ZH}.$$

Ama paralellerden

$$KB : BH :: \begin{cases} \Theta A : AH, \\ \Delta \Theta : ZH. \end{cases}$$

Ve $\Delta\Theta$ ve ZH paraleldir. Böylece

A, Z, ve Δ noktalarından [geçen çizgi] doğrudur. $\square$

Lemma XV (Önerme 141)

209. Bu önceden bakılmış olunca, AB $\Gamma\Delta$ 'ya paralel olsun, ve bunların üzerine doğrular AZ , ZB , ΓE , ve $E\Delta$ düşmüş olsun, ve $B\Gamma$ ve HK birleştirilmiş olsun. O zaman

A , M , ve Δ 'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt. ΔM birleştirilmiş olsun ve Θ 'ya uzatılmış olsun. Dolayısıyla $B\Gamma Z$ üçgeninin B tepe noktasından $\Gamma\Delta$ 'ya paralel olan BE ilerletilmiş olduğundan ve ΔE sürdürülmüş olduğundan,

$$\Gamma Z : Z\Delta :: \Delta E \cdot K\Lambda : E\Lambda \cdot K\Delta$$

meydana gelir. Ayrıca

$$\Delta E \cdot K\Lambda : \Delta K \cdot \Lambda E :: \Gamma H \cdot \Theta E : \Gamma E \cdot H\Theta$$

(zira üç doğru $\Gamma\Lambda$, $\Delta\Theta$, ve HK üzerine aynı E noktasından iki doğru $E\Gamma$ ve $E\Delta$ sürdürülmüştür). Böylece

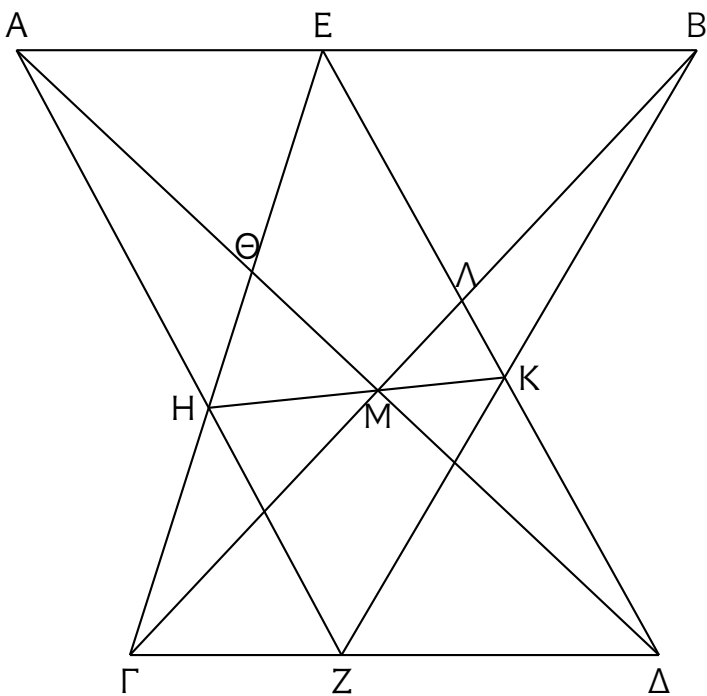
$$\Delta Z : Z\Gamma :: \Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E.$$

Ayrıca

Θ , M , ve Δ 'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Böylece önceden yazılmıştan ayrıca

A , M , ve Δ 'dan [geçen çizgi] doğrudur. $\square$



Lemma XVI (Önerme 142)

210. İki doğru AB ve $A\Gamma$ üzerine aynı Δ noktasından ΔB ve ΔE sürdürülmüş olsun, ve bunlarda H ve Θ noktaları alınmış olsun, ve

$$EH \cdot Z\Delta : \Delta E \cdot HZ :: B\Theta \cdot \Gamma\Delta : B\Delta \cdot \Gamma\Theta$$

olsun. O zaman

A , H , ve Θ 'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt. H 'dan $B\Delta$ 'ya paralel olan $K\Lambda$ ilerletilmiş olsun. Dolayısıyla

$$EH \cdot Z\Delta : \Delta E \cdot ZH :: B\Theta \cdot \Gamma\Delta : B\Delta \cdot \Gamma\Theta$$

olduğundan, ama

$$\begin{aligned} EH \cdot Z\Delta : \Delta E \cdot HZ &:: (HE : E\Delta)(\Delta Z : ZH) \\ &:: (KH : B\Delta)(\Gamma\Delta : H\Lambda) \end{aligned}$$

olduğundan, ve ayrıca

$$B\Theta \cdot \Gamma\Delta : B\Delta \cdot \Gamma\Theta :: (\Theta B : B\Delta)(\Delta\Gamma : \Gamma\Theta)$$

olduğundan, böylece

$$(KH : B\Delta)(\Gamma\Delta : H\Lambda) :: (B\Theta : B\Delta)(\Delta\Gamma : \Gamma\Theta).$$

Lemma XVII (Önerme 143)

211. Ama o halde AB ve $\Gamma\Delta$ paralel olmasın, ama N 'de kesişmiş olsun.

Kanıt. Dolayısıyla aynı A noktasından üç doğru BN , $B\Gamma$, ve BZ üzerine iki doğru ΔE ve ΔN sürdürülmüş olduğundan,

$$N\Delta \cdot \Gamma Z : N\Gamma \cdot \Delta Z :: \Delta E \cdot K\Lambda : E\Lambda \cdot K\Delta.$$

Ve

$$E\Delta \cdot K\Lambda : E\Lambda \cdot K\Delta :: E\Theta \cdot \Gamma H : E\Gamma \cdot \Theta H$$

(zira yine üç doğru $\Gamma\Lambda$, $\Delta\Theta$, ve HK üzerine aynı E noktasından sürdürülmüştür iki doğru $E\Gamma$ ve $E\Delta$). Ayrıca

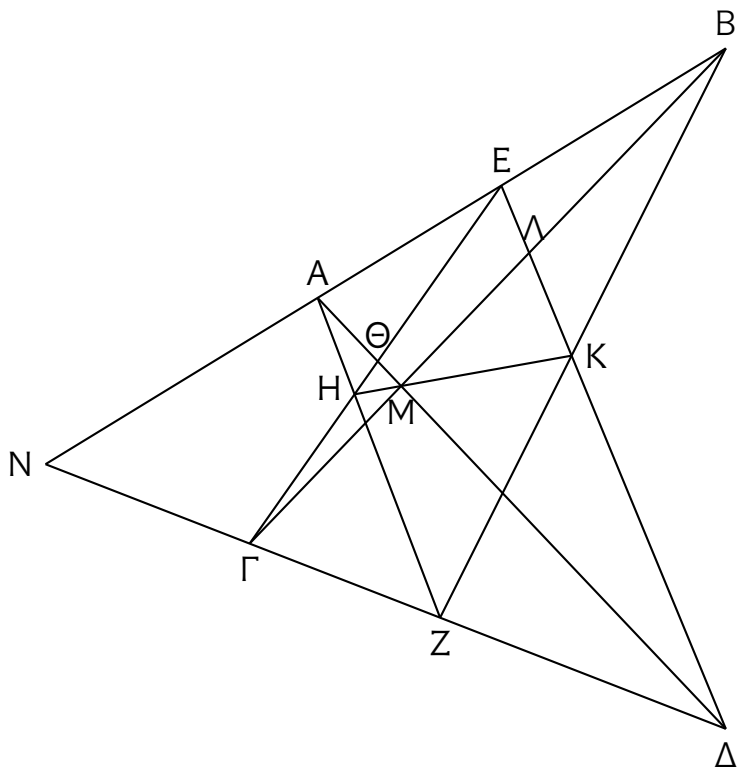
$$E\Theta \cdot \Gamma H : E\Gamma \cdot \Theta H :: N\Delta \cdot \Gamma Z : N\Gamma \cdot Z\Delta.$$

O halde önceden yazılmıştan

A , Θ , ve Δ 'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Böylece

A , M , ve Δ 'dan [geçen çizgi] doğrudur. $\square$



Lemma XVIII (Önerme 144)

212. Üçgen $AB\Gamma$ [olsun], ve $B\Gamma$ 'ya paralel olan $A\Delta$ ilerletilmiş olsun, ve ΔE ve ZH sürdürülmüş olsun. Ayrıca

$$EB^2 : E\Gamma \cdot \Gamma B :: BH : H\Gamma$$

olsun ($\epsilon\sigma\tau\omega$ δὲ ὡς τὸ ἀπὸ EB πρὸς τὸ ὑπὸ $E\Gamma B$, οὕτως ἢ BH πρὸς τὴν $H\Gamma$). O zaman $B\Delta$ birleştirilirse,

Θ , K , Γ 'dan [geçen çizgi] doğru olur.

Kanıt. $EB^2 : E\Gamma \cdot \Gamma B :: BH : H\Gamma$ olduğundan, $E\Gamma \cdot \Gamma B : EB \cdot B\Gamma$ ile aynı olan ortak $\Gamma E : EB$ oranı eklenmiş olsun. Böylece eşitlikten

$$\left. \begin{array}{l} EB^2 : EB \cdot B\Gamma \\ EB : B\Gamma \end{array} \right\} :: (BH : H\Gamma) \underbrace{(E\Gamma \cdot \Gamma B : EB \cdot B\Gamma)}_{E\Gamma : EB}.$$

Öyleyse

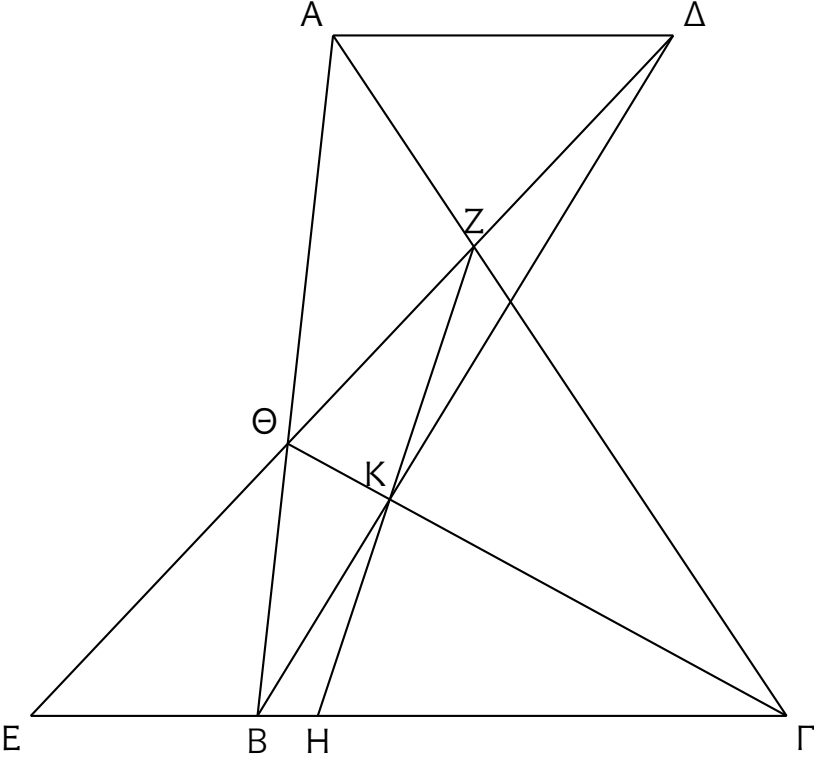
$$\begin{aligned} EB^2 : EB \cdot B\Gamma &:: (BH : H\Gamma)(E\Gamma : EB) \\ &:: E\Gamma \cdot BH : EB \cdot \Gamma H. \end{aligned}$$

Önceden yazılmış lemmadan

$$EB : B\Gamma :: \Delta Z \cdot \Theta E : \Delta E \cdot Z\Theta,$$

ve böylece

$$\Gamma E \cdot BH : \Gamma H \cdot EB :: \Delta Z \cdot \Theta E : \Delta E \cdot Z\Theta.$$



Böylece

Θ , K , ve Γ 'dan [geçen çizgi] doğrudur,

zira bu, [Lemma X'un] karşıt tersinin durumlarındadır. $\square$

Lemma XIX (Önerme 145)

213. Üç doğru AB , $A\Gamma$, $A\Delta$ üzerine bir E noktasından iki doğru EZ ve EB sürdürülmüş olsun. Ayrıca

$$EZ : ZH :: \Theta E : \Theta H$$

olsun. O zaman

$$BE : B\Gamma :: E\Delta : \Delta\Gamma$$

meydana gelir.

Kanıt. H 'dan BE 'a paralel olan ΛK ilerletilmiş olsun. Dolayısıyla

$$EZ : ZH :: E\Theta : \Theta H$$

olduğundan, ama

$$\begin{aligned} EZ : ZH &:: EB : HK, \\ E\Theta : \Theta H &:: \Delta E : H\Lambda \end{aligned}$$

olduğundan, böylece ayrıca

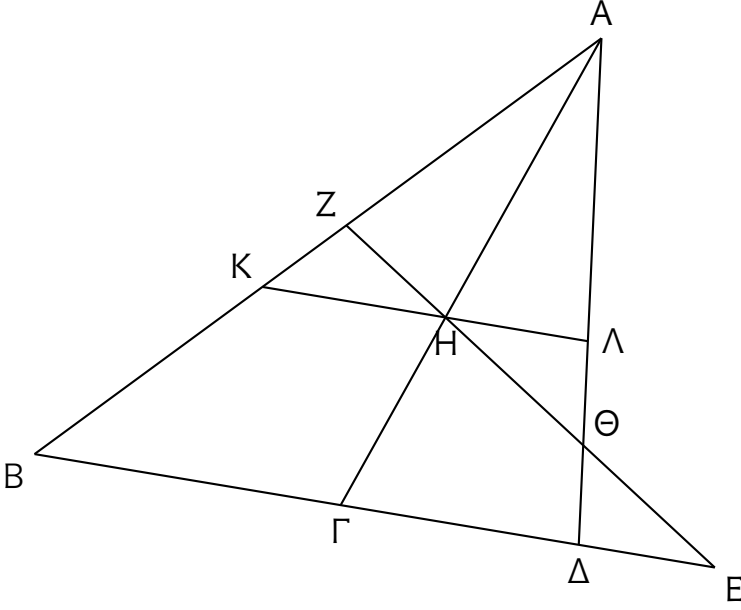
$$BE : HK :: \Delta E : H\Lambda.$$

İzlemeyle

$$EB : E\Delta :: KH : H\Lambda.$$

Ve

$$KH : H\Lambda :: B\Gamma : \Gamma\Delta.$$



Böylece ayrıca

$$BE : E\Delta :: B\Gamma : \Gamma\Delta.$$

İzlemeyle

$$EB : B\Gamma :: E\Delta : \Delta\Gamma.$$

□

[Diğer] durumlar da benzerdir.

Ekler

A. Pappus'un Dili

Fiiller Sözlüğü

ἄγω ilerle= (örneğin Lemma I'de: **Ἦχθω** διὰ τοῦ Ζ τῇ ΒΔ παράλληλος ἢ ΖΛ, “Z'dan BΔ'ya paralel olan ZΛ *ilerletilmiş olsun*”)

ἀγάγω (sadece Lemma IV'te: Ἐὰν γὰρ διὰ τοῦ Ε τῇ ΘΓ παράλληλον **ἀγάγω** τὴν ΕΖ, “Eğer E'dan ΘΓ'ya paralel olan ΕΖ *ilerlersem*”)

διάγω sürdür= (örneğin Lemma III'te: Εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΑΒ ΓΑ ΔΑ **διήχθωσαν** δύο εὐθεῖαι αἱ ΘΕ ΘΔ, “Üç doğru ΑΒ, ΓΑ, ve ΔΑ üzerine iki doğru ΘΕ ve ΘΔ *sürdürülmüş olsun*”)

αἰρέω

ἀφαιρέω ayır= (Lemma VIII)

βάλλω

ἐκβάλλω uzat=

μεταβάλλω değiştir=

γιννόμεναι ol= (doğ=, meydana gel=)

γράφω

προγράφω önceden yaz=

δείκνυμι göster=

ἀποδείκνυμι kanıtl= (Lemma XII)

εἶμι ol=

ἔρῳ söyle= (λέγω'nun gelecek zamanı olarak kullanılır. Lemma VI'da sadece: ἐκατέρων γὰρ τῶν **εἰρημένων** ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τῆς ΘΗ πρὸς τὴν ΗΕ λόγος,

“zira *söylenmiş* [iki oranın] her biri, ΘΗ : ΗΕ oranıyla aynıdır”)

ἔχω -i ol=

ζεύγνυμι birleştir=

ἐπιζεύγνυμι birleştir=

θεωρέω

προθεωρέω önceden bak= (Sadece Lemma XV'te:

Τούτου προτεθεωρημένου [*genitivus absolutus*], “Bu önceden bakılmış olunca”)

κεῖμαι otur=

προσκέιμαι eklen=

ὑποκέιμαι varsayıl=

κλάω eğ= (Lemma IX: **κεκλάσθω** ἢ ΖΘΗ, “ΖΘΗ *eğilmiş olsun*”)

κρούω

ἐκκρούω kov=

λαμβάνω al= (Lemma XVI'da: **ἐπ' αὐτῶν εἰλήφθω** σημεία τὰ Η Θ, “bunlarda Η ve Θ noktaları *alınmış olsun*”)

πίπτω

ἐμπίπτω üzerine düş=

συμπίπτω kesiş= (her zaman **συμπιπτέτω** [tekil] veya **συμπιπτέτωσαν** [çoğul], “*kesişmiş olsun*”)

τίθημι koy= (Lemma VI: **ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῆς ΕΒ θῶ** τῇ ΗΒ ἴσην τὴν ΒΘ, “zira eğer ΕΒ'da ΗΒ'ya eşit olan ΒΘ'yı *koyarsam*”)

τυγχάνω rastla= (**τυχόν**, “rasgele”: aşağıya bakın)

Edatlar Sözlüğü

ἀλλά ama

ἄλλο δέ τι τυχόν τὸ ὑπὸ τῶν da
başka rasgele bir [çarpımdır] (örneğin Lemma III’e ba-
kın)

ἄρα böylece

διὰ ταύτά aynı [sebepl]e

γάρ zira

[*genitivus absolutus*] -ince

δέ de, ve

δή o halde

ἐπεί -diğinden

καί de, dahi, ve, ayrıca—örneğin Lemma I’de:

ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΛ,
οὕτως ἐν παραλλήλῳ ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΖ,
καὶ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ,

Böylece paralellerden $ΕΒ : ΒΛ :: \begin{cases} ΕΚ : ΚΖ, \\ ΔΘ : ΖΗ. \end{cases}$

κατὰ τὰ αὐτά aynı [şekil]de

μέν. . . δέ • . . • . . de

οὖν dolayısıyla

πάλιν yine

τουτέστιν yani—örneğin Lemma I’de:

ἐστιν ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΖ,
τουτέστιν ἐν παραλλήλῳ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν
ΑΛ,
οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΗ,

$$\frac{\Delta A : AZ}{BA : AL} :: \Gamma A : AH,$$

ve Lemma III’te:

ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖ ΗΘ,
οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖ ΘΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖ ΗΘ,
τουτέστιν ἡ ΘΜ πρὸς ΘΗ,
τουτέστιν ἡ ΛΘ πρὸς τὴν ΘΚ,

$$\begin{aligned} ΕΘ \cdot ΗΖ : ΕΖ \cdot ΗΘ &:: ΕΖ \cdot ΘΜ : ΕΖ \cdot ΗΘ \\ &:: ΘΜ : ΘΗ \\ &:: ΛΘ : ΘΚ. \end{aligned}$$

ὥστε öyleyse

Yunan Alfabeti

A	α	alfa
B	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ	epsilon (“çıplak e”)
Z	ζ	zeta
H	η	eta
Θ	θ	theta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mü
N	ν	nü
Ξ	ξ	ksi
O	$\omicron$	omikron (“küçük o”)
Π	π	pi
P	ρ	ro (<i>rho</i>)
Σ	σ, ς	sigma
T	τ	tau
Y	υ	üpsilon
Φ	ϕ	fi (<i>phi</i>)
X	χ	hi (<i>khi, chi</i>)
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega (“büyük o”)

Harfler, Yunan Font Derneği’nin “NeoHellenic” fontundan alınır. Bu font

$$\delta = \text{a}, \quad \epsilon = \text{e}, \quad \zeta = \text{z}, \quad \xi = \text{ı} = \text{i}, \quad \omega = \text{o}$$

alternatif biçimlerini sağlar. Sigmanın küçük ς biçimi sadece bir sözcüğün sonunda kullanılır.

B. Oranlar ve orantılar

Giriş'te gördüğümüz gibi, A , B , Γ , ve Δ büyüklüklerinin orantılı olması için, tanımlanan koşul,

$$\begin{aligned} mA < kB & \text{ ise } m\Gamma < k\Delta, \\ mA = kB & \text{ ise } m\Gamma = k\Delta, \\ mA > kB & \text{ ise } m\Gamma > k\Delta \end{aligned}$$

gerektirmelerinin her k ve her m sayısı için doğru olmasıdır. Bu tanım, Öklid'in *Öğeler*'inin Kitap V'inde bulunur. Kitap VII'de *sayıların* orantılı olması tanımlanır. Burada a , b , c , ve d 'nin orantılı olması için, tanımlanan koşul,

- a ve b 'nin en büyük ortak ölçüsü e ,
- c ve d 'nin en büyük ortak ölçüsü f

olduğunda, bazı k ve ℓ için

$$\begin{aligned} a &= k \cdot e, & b &= \ell \cdot e, \\ c &= k \cdot f, & d &= \ell \cdot f. \end{aligned}$$

En büyük ortak ölçüler, Öklid Algoritması ile bulunur. O zaman a , b , c , ve d 'nin orantılı olması için, gerek ve yeter bir koşul, hem a ve b için, hem c ve d için, Öklid Algoritmasının adımlarının aynı olmasıdır. Aynı koşul, büyüklüklerin orantılı olması için tanımlanır. Bu fikirler bu bölümde açıklanacaktır.

Sayılar

Giriş'te gördüğümüz gibi, *Öğeler*'in VII'nci kitabında, bir **sayı**, birimlerin oluşturduğu bir çokluktur. Öklid'in diyagramla-

rında, sayılar ve onların birimleri, sınırlanmış doğrudurlar. Örneğin 4 sayısı, Şekil 16'daki gibi çizilebilir. Sayılar toplanabilir, ve tekrar tekrar toplanabilir; örneğin

$$4 + 4 + 4 = 12.$$

Bu toplam, 3 kere 4'tür; kısaca

$$4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4.$$

Bundan dolayı

- 4, 12'yi ölçer;
- 3, 12'yi böler.

Benzer şekilde

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3 = 12.$$

Bundan dolayı, Şekil 17'deki gibi,

$$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3.$$

Genelde, k ve a sayıları verildiğinde, $k \cdot a$ **çarpımı** vardır. Burada

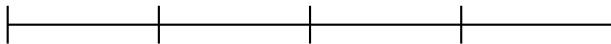
$$k \cdot a = \underbrace{a + \cdots + a}_k;$$

kısaca

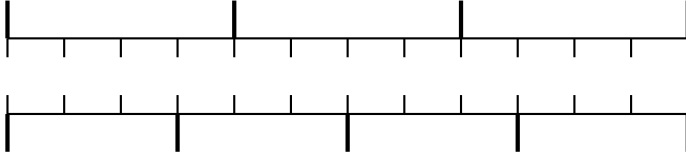
$$k \cdot a = a + \cdots + a.$$

O zaman

- k , $k \cdot a$ çarpımının bölenidir;



Şekil 16.: 4 sayısı



Şekil 17.: $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$

- $a, k \cdot a$ çarpımının ölçüsüdür.

Bu şekilde ölçmenin ve bölmenin tanımları farklıdır. Öklid, bu bağıntıların denk olduğunu kanıtlar. Biz, aynı şey yapacağız.

Öklid Algoritması ile iki sayının en büyük ortak ölçüsünü buluruz. Örneğin

$$\begin{aligned} 62 &= 4 \cdot 14 + 6, \\ 14 &= 2 \cdot 6 + 2, \\ 6 &= 3 \cdot 2, \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned} 62 &= 4 \cdot 14 + 6, \\ 14 &= 2 \cdot 6 + 2, \\ 6 &= 3 \cdot 2, \end{aligned}$$

dolayısıyla 62 ve 14'ün en büyük ortak ölçüsü 2'dir. Aynı şekilde

$$\begin{aligned} 93 &= 4 \cdot 21 + 9, \\ 21 &= 2 \cdot 9 + 3, \\ 9 &= 3 \cdot 3, \end{aligned}$$

dolayısıyla 93 ve 21'in en büyük ortak ölçüsü 3'tür.

İki hesabımızda, $(4, 2, 3)$ bölenler listesi ortaktır. Sonuç olarak 62'nin 14'e *oranı*, 93'ün 21'e *oranı ile aynıdır*; kısaca

$$62 : 14 :: 93 : 21.$$

Genelde, $a > b$ olduğunda, bir ve tek bir $(m_1, \dots, m_n)$ sayılar listesi vardır ki bazı $(a_1, \dots, a_{n+1})$ sayılar listesi için

$$a = a_1, \quad b = a_2 > \cdots > a_{n+1}$$

ve $\{a, b\}$ çifti için Öklid Algoritmasının aşağıdaki n adımı vardır:

[illegible]

Bu durumda

- a_{n+1} sayısı, $\{a_1, a_2\}$ çiftinin en büyük ortak ölçüsüdür;
- $(m_1, \dots, m_n)$ listesi, $\{a_1, a_2\}$ çiftinin **karşılıklı çıkarma dizisi** veya **antifiretik dizidir**.

Öklid Algoritması'nın yöntemi, karşılıklı çıkarmadır, ki Yunanca'da ἀνθυφαίρεσις (Latince'de *anthyphaeresis*).

Eğer $\{c, d\}$ çiftinin antifiretik dizisi, $\{a, b\}$ çiftininki ile aynı ise, o zaman (en eski tanıma göre) çiftlerin **oranı aynıdır**, yani çiftler **orantılıdır**. Bu durumda orantılılığın bir denklik bağıntısı olduğu hemen çıkar.

Eğer $\{a, b\}$ ve $\{c, d\}$ orantılı ise, ve ayrıca $a > b$ ve $c > d$ ise, o zaman

$$a : b :: c : d, \qquad b : a :: d : c$$

ifadelerini yazarız. Bunların her biri, ve onun ifade ettiği anlamlık, bir **orantıdır**.

Öklid Algoritması'nın yukarıdaki n adımında a_{n+1} , her a_i sayısının bir ölçüsüdür. Şimdi a_{n+1} , e olarak yazılsın. O zaman

öyle $(k_1, \dots, k_n)$ vardır ki

$$a_1 = k_1 \cdot e, \quad \dots, \quad a_n = k_n \cdot e,$$

dolayısıyla algoritmanın adımları,

$$k_1 \cdot e = m_1 \cdot k_2 \cdot e + k_3 \cdot e,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$k_{n-1} \cdot e = m_{n-1} \cdot k_n \cdot e + e,$$

$$k_n \cdot e = m_n \cdot e.$$

Burada e 'nin yerine herhangi f sayısı konulabilir. Şimdi

$$k_1 = k, \quad k_2 = \ell$$

olsun. O zaman

$$a = k \cdot e, \quad b = \ell \cdot e.$$

Ayrıca $c > d$ olduğunda, bir $\{c, d\}$ çiftinin $\{a, b\}$ çiftinin oranını paylaşması için, yani

$$a : b :: c : d$$

için, yeni gerek ve yeter bir koşulumuz vardır. Aslında c ve d 'nin en büyük ortak ölçüsü f olduğunda, koşulumuz

$$c = k \cdot f, \quad d = \ell \cdot f.$$

İlk bir sonuç olarak

$$\boxed{a : b :: a : c \quad \text{ise} \quad b = c}.$$

Giriş'te *büyükliklere* baktık. Şimdi $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{Z}$, cinsi aynı olan büyüklikler olsun. O zaman

$$m\mathbf{E} < m\mathbf{Z} \quad \text{ancak ve ancak} \quad \mathbf{E} < \mathbf{Z}.$$

Sonuç olarak,

$$a : b :: c : d$$

olduğunda,

$$b\mathbb{E} < a\mathbb{Z} \quad \text{ancak ve ancak} \quad d\mathbb{E} < c\mathbb{Z},$$

dolayısıyla Giriş'te tanımladığımız

$$\mathbb{E} : \mathbb{Z} < a : b, \quad \mathbb{E} : \mathbb{Z} < c : d$$

ifadeleri aynı anlama gelir.

Sayıların toplanması birleşmeli ve değişmelidir:

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a + b = b + a.$$

Bundan dolayı

$$\begin{aligned} k \cdot (a + b) &= (a + b) + \cdots + (a + b) \\ &= (a + \cdots + a) + (b + \cdots + b) \\ &= k \cdot a + k \cdot b. \end{aligned}$$

Sonuç olarak, eğer $\{a, b\}$ çiftinin ve $\{c, d\}$ çiftinin karşılıklı çıkarması aynı ise, o zaman ($a > b$ ve $c > d$ olduğunda) $\{a + c, b + d\}$ çiftininki aynıdır. Diğer yöntem ile,

$$\begin{aligned} a &= k \cdot e, & b &= \ell \cdot e, \\ c &= k \cdot f, & d &= \ell \cdot f \end{aligned}$$

ise, o zaman

$$a + c = k \cdot (e + f), \quad b + d = \ell \cdot (e + f).$$

Kısaca

$$\boxed{a : b :: c : d \quad \text{ise} \quad a : b :: (a + c) : (b + d).}$$

Bundan

$$a : b :: (a + \cdots + a) : (b + \cdots + b),$$

yani

$$\boxed{a : b :: k \cdot a : k \cdot b.}$$

Şimdi yine

$$a : b :: c : d$$

olsun, dolayısıyla

$$\begin{aligned} a &= k \cdot e, & b &= \ell \cdot e, \\ c &= k \cdot f, & d &= \ell \cdot f \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$e : f :: k \cdot e : k \cdot f$$

olduğundan

$$e : f :: a : c.$$

Aynı şekilde

$$e : f :: b : d,$$

dolayısıyla

$$a : c :: b : d.$$

Kısaca

$$\boxed{a : b :: c : d \quad \text{ise} \quad a : c :: b : d.}$$

Şimdi

$$a \cdot 1 = a, \quad 1 : b :: a \cdot 1 : a \cdot b$$

olduğundan

$$1 : b :: a : a \cdot b,$$

dolayısıyla

$$1 : a :: b : a \cdot b.$$

Aynı zamanda

$$1 : a :: b : b \cdot a,$$

dolayısıyla

$$b : a \cdot b :: b : b \cdot a.$$

Sonuç olarak

$$\boxed{a \cdot b = b \cdot a.}$$

Böylece bir çarpımın ölçüleri ve bölenleri aynıdır, dolayısıyla çarpma değişmelidir.

Tekrar

$$a : b :: c : d$$

olsun, dolayısıyla bazı e , f , k , ve ℓ için

$$a = k \cdot e, \quad b = \ell \cdot e, \quad c = k \cdot f, \quad d = \ell \cdot f.$$

Çarpma değişmeli olduğundan

$$a \cdot d = k \cdot e \cdot \ell \cdot f = \ell \cdot e \cdot k \cdot f = b \cdot c;$$

kısaca

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

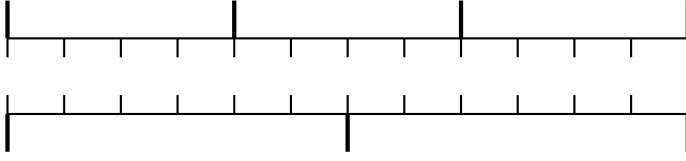
Tersi de doğru olmalı. Böylece

$$\boxed{a : b :: c : d \quad \text{ancak ve ancak} \quad a \cdot d = b \cdot c.}$$

Bu denklik, orantılılığın tanımı olarak kullanılabilir, ama bu durumda oranı aynı olma bağıntısının geçişli olduğu, tamamen açıktır.

Öklid için eşitlik, geometrik bir kavramdır. Örneğin

$$2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$$



Şekil 18.: $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$

eşitliği, Şekil 18'deki gibi çizilebilir. Bugün aynı eşitlik,

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

biçiminde yazılabilir, ama burada $2/3$ veya $4/6$ 'nın kendisi için açık bir geometrik anlamı yoktur. Genelde a ve b sayısı için a/b ,

$$\{(x, y) : a : b :: x : y\}$$

denklik sınıfı olarak tanımlanabilir. Bir

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

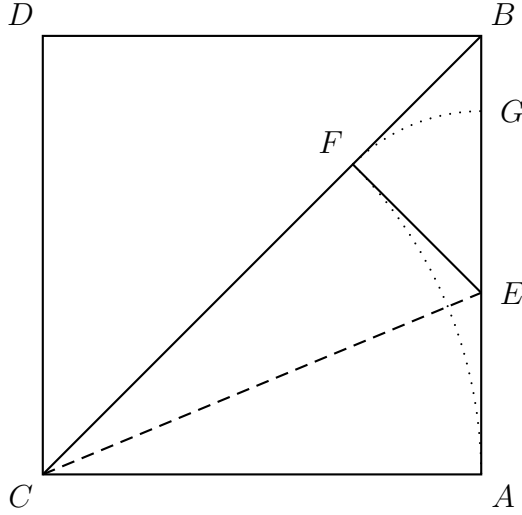
eşitliğine göre (a, b) ve (c, d) 'nin birbirinden farklı olabildiği halde denklik sınıfları aynıdır, yani

$$a : b :: c : d.$$

Büyüklükler

Giriş'te gördüğümüz Arşimet Aksiyomu sayesinde, cinsi aynı olan büyüklüklerin antifiretik dizisi vardır. Eğer $A > B$ ve $\Gamma > \Delta$ ise, ve ayrıca $\{A, B\}$ ve $\{\Gamma, \Delta\}$ 'nin antifiretik dizisi ortak ise, o zaman eski bir tanıma göre

$$A : B :: \Gamma : \Delta.$$



Şekil 19.: Kare

Bu tanım, sayıların orantılılığının tanımı ile aynıdır. Bununla birlikte, bazı büyüklüklerin antifiretik dizisi vardır ama sonsuzdur, dolayısıyla büyüklüklerin ortak ölçüsü yoktur.

Bir örneğe bakalım. Bir karenin köşegeninin ve kenarının antifiretik dizisi,

$$(1, 2, 2, 2, \dots).$$

Zira Şekil 19'daki $ABDC$ karesinde

$$CF = CA, \quad FE \perp CB, \quad EG = EF$$

olsun. O zaman FBE üçgeninde B ve E köşelerindeki açılarının her biri, dik açının yarısıdır, dolayısıyla

$$EF = FB.$$

Ayrıca CAE ve CFE üçgenlerinde, Pisagor Teoremi sayesinde

$$AE = EF.$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned}CB &= CF + FB = CA + FB = AB + FB, \\AB &= AE + EG + GB = FB + FB + GB;\end{aligned}$$

kısaca

$$\begin{aligned}CB &= 1 \cdot AB + FB, \\AB &= 2 \cdot FB + GB.\end{aligned}$$

Şimdi (FB, GB) , (AB, FB) gibidir: her çiftte, birinci doğru bir karenin kenarıdır, ve ikinci doğru, aynı karenin köşegeninin ve kenarının farkısına eşittir. O zaman devam edebiliriz. A , F , ve G noktası, Şekil 20'deki gibi sırasıyla A_1 , A_2 , ve A_3 olsun. O zaman

- CB 'de öyle $A_4, A_6, A_8, \dots$ noktaları vardır, ve
- A_1B 'de öyle $A_5, A_7, A_9, \dots$ noktaları vardır,

ki

$$A_1B > A_2B > A_3B > A_4B > A_5B > \dots$$

ve her durumda

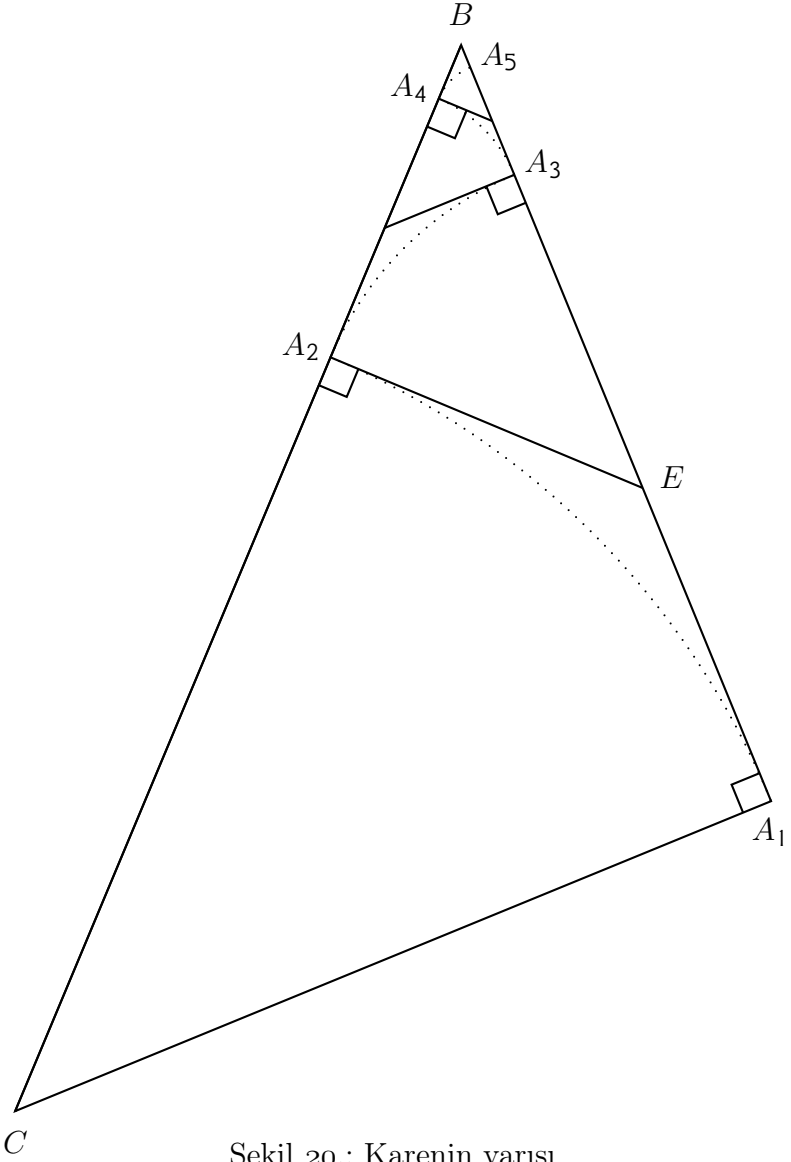
$$A_nB = 2 \cdot A_{n+1}B + A_{n+2}B.$$

Bu şekilde Öklid Algoritması ile

$$\begin{aligned}CB &= 1 \cdot A_1B + A_2B, \\A_1B &= 2 \cdot A_2B + A_3B, \\A_2B &= 2 \cdot A_3B + A_4B, \\A_3B &= 2 \cdot A_4B + A_5B, \\&\dots\dots\dots\end{aligned}$$

hesabı çıkar, dolayısıyla CB 'nin ve A_1B 'nin antifiretik dizisi $(1, 2, 2, \dots)$. Bu şekilde herhangi karenin köşegeninin ve kenarının antifiretik dizisi $(1, 2, 2, \dots)$ olmalı. Böylece örneğin

$$CB : A_1B :: EB : A_2B.$$



Şekil 20.: Karenin yarısı

Başka bir örnekte, Şekil 21'deki gibi $ABCDE$, düzgün bir beşgen olduğunda, AC ve CD 'nin antifiretik dizisi,

$$(1, 1, 1, \dots).$$

Ayrıntıları size bırakıyorum.

Bir örneğe daha bakalım. Şekil 22'de ABC , eşkenar bir üçgendir. AC , D 'ye, ve BC , E 'ye uzatılmıştır, ve $ABDE$ bir dikdörtgendir. Pisagor Teoreminden

$$AE^2 = AD^2 - DE^2 = (2AC)^2 - AC^2 = 3AC^2.$$

AE ve AC 'nin antifiretik dizisinin

$$(1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$$

—yani $(1, \overline{1, 2})$ —olduğunu göstereceğiz. Bunun için

$$FE = AC, \quad GD = AE$$

olsun. O zaman algoritmanın ilk iki adım

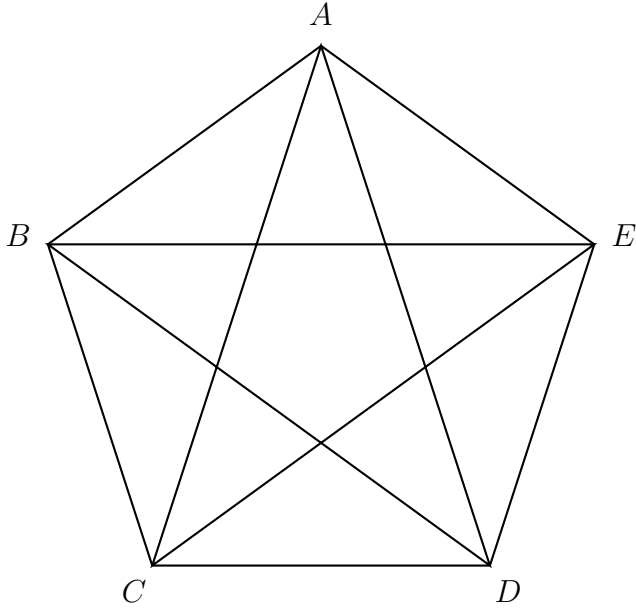
$$\begin{aligned} AE &= AC + AF, \\ AC &= AF + AG, \end{aligned}$$

çünkü

$$\begin{aligned} AC + AF &= FE + AF = AE, \\ AF + AG &= (AE - AC) + (2AC - AE) = AC. \end{aligned}$$

Şimdi

$$GH \parallel BE, \quad KH = AG$$



Şekil 21.: Düzgün beşgen

olsun. Algoritmanın üçüncü adım

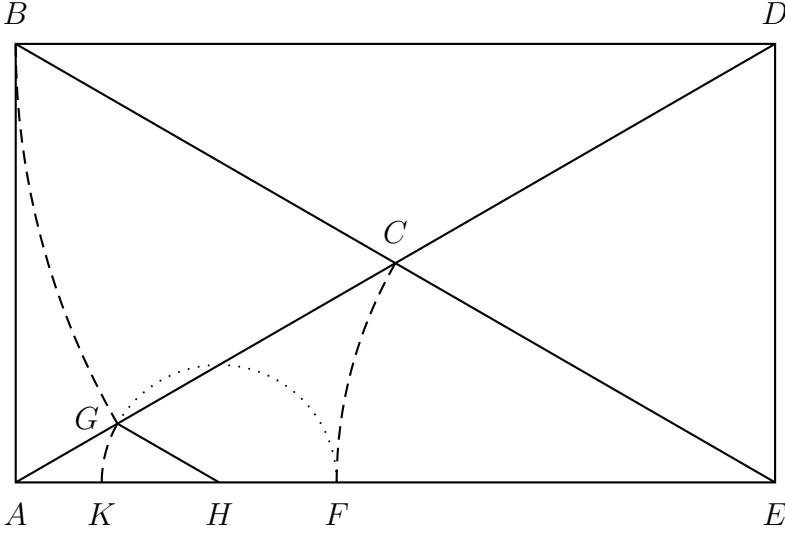
$$AF = 2AG + AK$$

olduğunu göstereceğiz. Bunun için

$$AG = HF$$

yeter. Tekrar Pisagor Teoremi sayesinde

$$AH^2 = 3AG^2.$$



Şekil 22.: Eşkenar üçgen

Bundan dolayı

$$\begin{aligned}
 AH^2 &= 3(2AC - AE)^2 \\
 &= 12AC^2 - 12AC \cdot AE + 3AE^2 \\
 &= 9AC^2 - 12AC \cdot AE + 4AE^2 \\
 &= (2AE - 3AC)^2.
 \end{aligned}$$

Burada $2AE > 3AC$, dolayısıyla

$$AH = 2AE - 3AC,$$

ve sonuç olarak

$$HF = AE - AC - AH = 2AC - AE = AG.$$

Şimdi algoritmanın ilk üç adım

$$\begin{aligned} AE &= AC + AF, \\ AC &= AF + AG, \\ AF &= 2AG + AK, \end{aligned}$$

dolayısıyla antifiretik dizi $(1, 1, 2)$ ile başlar. Ayrıca

$$AF - AG = AH,$$

ve $GH \parallel CE$ olduğundan $\{AH, AG\}$ 'nin antifiretik dizisi, $\{AE, AC\}$ 'ninkidir. O zaman bu dizi $(1, \overline{1, 2})$ olmalı.

Cebir ile daha kolay bir yöntem vardır. Aslında cebire bir temel verme peşindeyiz. Yukarıdaki adımlar

$$\begin{aligned} \frac{AE}{AC} &= 1 + \frac{AF}{AC}, \\ \frac{AC}{AF} &= 1 + \frac{AG}{AF}, \\ \frac{AF}{AG} &= 2 + \frac{AK}{AG} \end{aligned}$$

biçimde yazılabilir. Ayrıca AC 'nin yerine 1 , AE 'nin yerine $\sqrt{3}$ konulabilir. Bu durumda Öklid Algoritması aşağıdaki şekilde başlar:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= 1 + (\sqrt{3} - 1), \\ \frac{1}{\sqrt{3} - 1} &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \\ \frac{2}{\sqrt{3} - 1} &= \sqrt{3} + 1 = 2 + (\sqrt{3} - 1). \end{aligned}$$

Şimdi ikinci ve üçüncü adım tekrarlar.

Genelde

$$A > B, \quad p > q, \quad \Gamma > \Delta, \quad b < c$$

olsun, ve aşağıdaki antifiretik diziler olsun.

$\{A, B\}$	$(a_1, \dots, a_n, b, \dots)$
$\{p, q\}$	$(a_1, \dots, a_n, c)$
$\{\Gamma, \Delta\}$	$(a_1, \dots, a_n, c, d, \dots)$

Eğer n

- çift ise

$$A : B < p : q < \Gamma : \Delta,$$

- tek ise

$$A : B > p : q > \Gamma : \Delta$$

tanımlanabilir. Bunun kontrolünü size bırakıyorum. Bu şekilde orantılılık için Giriş'te ve burada gördüğümüz tanımlar denktir.

C. Thales, Pappus, ve Desargues

Giriş’te dediğimiz gibi, Pappus sık sık Şekil 23’teki Thales Teoremi’ni kullanır. Lemma VIII bir istisnadır. Bu lemmaya göre, eğer $ABCDEF$ altıgeninde, Şekil 24’te gibi

$$AB \parallel DE, \quad BC \parallel EF$$

ise, o zaman

$$CD \parallel FA.$$

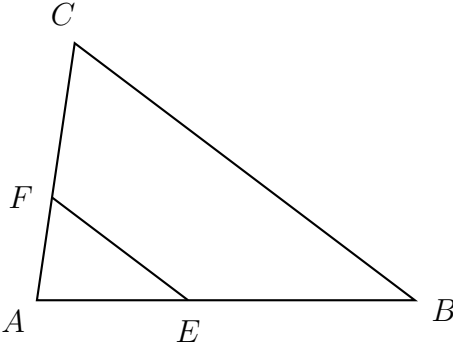
Bu bölümde bu lemmaya, **Pappus Teoremi** diyelim. Bu teorem sayesinde, Arşimet Aksiyomu’nu kullanmadan, orantılılığı tanımlayabiliriz. İki yöntem vardır.

1. Tanım olarak Thales Teoremi’ni kullanabiliriz. Bu durumda $::$ “oranı aynı olma” bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğu açık değildir. Bağıntının simetrik olduğu açıktır, ama geçişli olduğunu göstermek için çalışmak zorundayız.
2. Çarpma ile “oranı aynı olma” bağıntısını tanımlayabiliriz. Bu durumda yine Thales Teoremi’ni kanıtlamak zorundayız.

Çarpma ile başlayalım. Son bölümde, sayılarda, çarpmanın değişmeli oluşunu gösterdikten sonra, sayfa 88’de

$$a : b :: c : d \quad \text{ancak ve ancak} \quad a \cdot d = b \cdot c$$

denkliğini kanıtladık. Bunu, $::$ bağıntısının tanımı olarak alırsak, bağıntının geçişli olduğunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz.



$$BC \parallel EF$$

ancak ve ancak

$$AB : AE :: AC : AF$$

Şekil 23.: Thales Teoremi

Eğer

$$a : b :: c : d, \quad c : d :: e : f$$

ise, o zaman tanımımıza göre

$$a \cdot d = b \cdot c, \quad c \cdot f = d \cdot e,$$

dolayısıyla

$$a \cdot d \cdot f = b \cdot c \cdot f, \quad b \cdot c \cdot f = b \cdot d \cdot e,$$

ve (eşitlik geçişli olduğundan)

$$a \cdot d \cdot f = b \cdot d \cdot e,$$

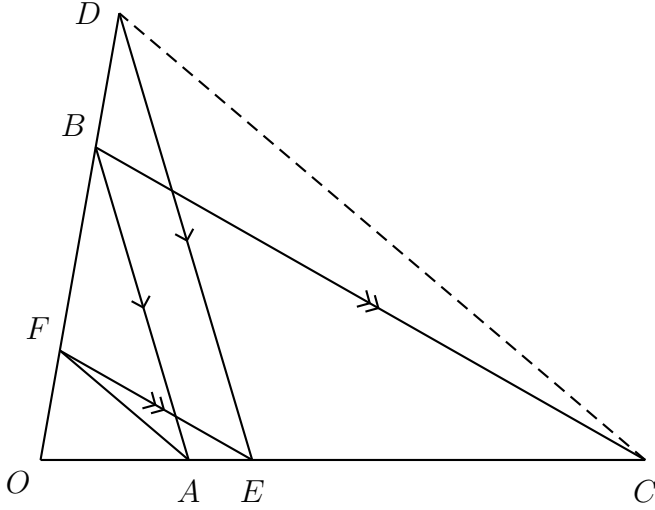
ve sonuç olarak

$$a \cdot f = b \cdot e,$$

yani

$$a : b :: e : f.$$

Sayıların yerine uzunluklar kullanarak aynı şey yapabiliriz, ama burada



Şekil 24.: Pappus Teoremi

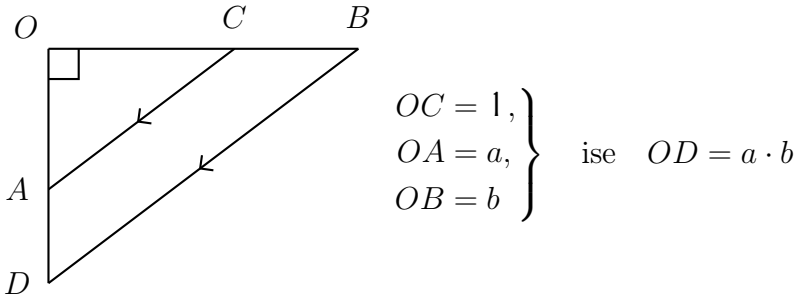
- Giriş'te dediğimiz gibi iki uzunluğun çarpımı bir alandır;
- üç uzunluğun çarpımı bir hacim olur.

Alan ve hacim kullanmak istemezsek, 1637 yılında René Descartes'in yaptığı gibi [8], ve 1899 yılında David Hilbert'in daha ayrıntılı bir şekilde yaptığı gibi [14], birim olarak bir uzunluk seçerek, Şekil 25'teki gibi iki uzunluğun çarpımını yeni bir uzunluk olarak tanımlayabiliriz. Bu *Descartes çarpmasının* değişmeli ve birleşmeli olduğu, Pappus Teoremi'nden çıkar. Şekil 24'te, eğer

$$OA = OF$$

ise, o zaman $\angle OAF = \angle OFA$, dolayısıyla (ve $CD \parallel FA$ olduğundan)

$$\angle OCD = \angle OAF = \angle OFA = \angle ODC,$$



Şekil 25.: Descartes çarpması

ve sonuç olarak

$$OC = OD.$$

Şimdi ayrıca O 'daki açı dik olsun. Eğer

$$OA = OF = 1, \quad OE = a, \quad OB = b$$

ise, o zaman

$$OC = a \cdot b, \quad OD = b \cdot a,$$

dolayısıyla

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Bu şekilde Descartes çarpması değişmelidir. Eğer Şekil 24'te

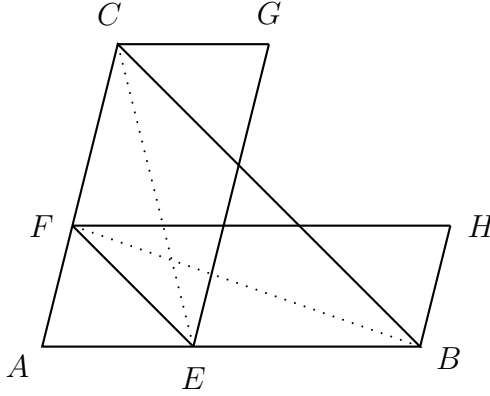
$$OA = OF = c, \quad OE = a \cdot c, \quad OB = b \cdot c$$

ise, o zaman

$$OC = a \cdot (b \cdot c), \quad OD = b \cdot (a \cdot c),$$

dolayısıyla

$$a \cdot (c \cdot b) = a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot c) = (a \cdot c) \cdot b.$$



Şekil 26.: Thales Teoremi için birinci adım

Böylece Descartes çarpması birleşmelidir.

Orantılılık için yeni tanımımız ile Thales Teoremi'ni kanıtlayalım. Şekil 26'da,

$$BC \parallel EF \quad \text{ancak ve ancak} \quad AG = AH;$$

burada AG 'nin anlamı, $AEGC$ paralelkenardır, ve aynı şekilde AH , $ABHF$ paralelkenardır. Ayrıntılar, [20] makalemdedir. Şekil 27'yi kullanarak

$$AG = AH \quad \text{ancak ve ancak} \quad AB \cdot AF = AE \cdot AC.$$

denkliğini gösterebiliriz. Yeni tanımımız ile

$$AE \cdot AC = AB \cdot AF \quad \text{ancak ve ancak} \quad AB : AE :: AC : AF.$$

Son üç denklikten Thales Teoremi çıkar.

Şimdi, orantılılığın tanımı olarak Thales Teoremi'ni kabul ederek “oranı aynı olma” bağıntısının geçişli olduğunu göstereceğiz. Bu geçişlilik, **Desargues Teoremi** ile denktir [7]. Bu teoreme göre, Şekil 28'de, eğer



ise, o zaman

$$BC \parallel EF.$$

Üç kere Pappus Teoremi'ni kullanarak 1905 yılında Gerhard Hessenberg, Desargues Teoremi'ni kanıtladı [13]. Şekil 29'da tekrar

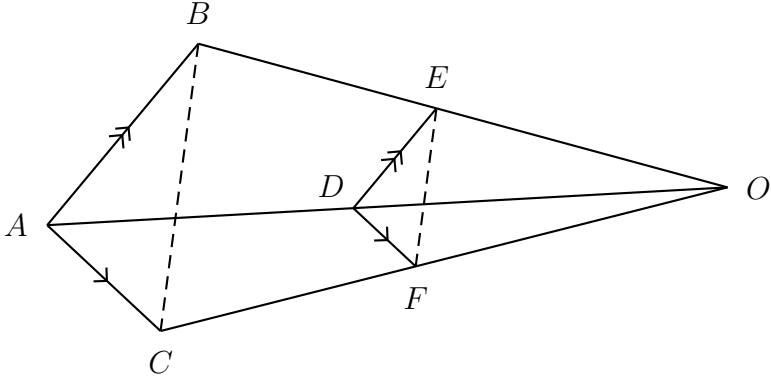
$$AB \parallel DE, \quad AC \parallel DF$$

varsayılır. Eğer ayrıca

$$OB \nparallel AC$$

ise, D noktasından geçen ve OB doğrusuna paralel olan LM çizeriz ve diyagramı tamamlarız. Pappus Teoremi ile

- $ONDLAB$ altıgeninde $ON \parallel AL$,
- $ONMLCB$ altıgeninde $BC \parallel MN$,

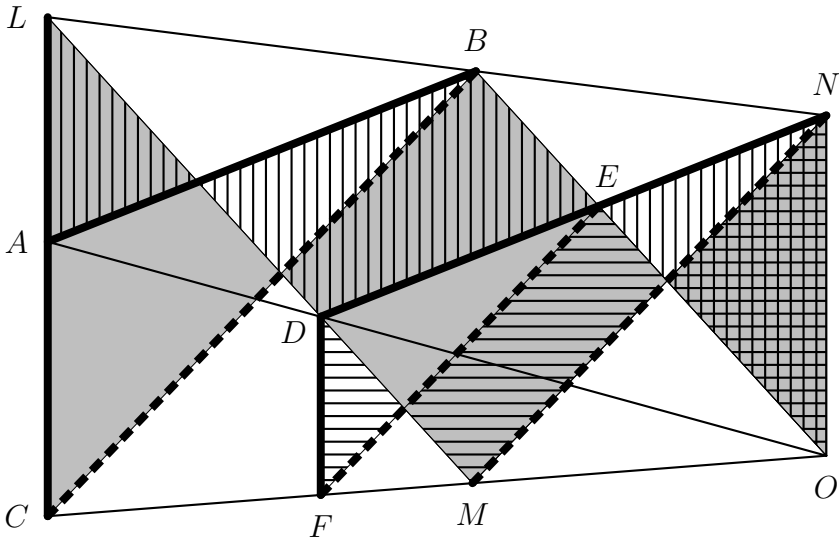


Şekil 28.: Desargues Teoremi

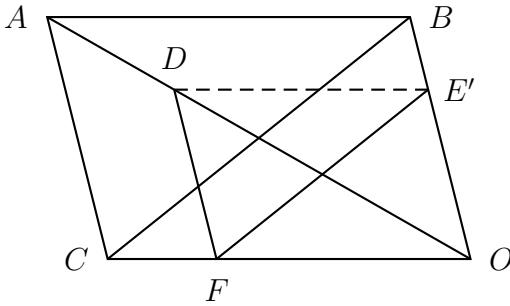
- $ONMDFE$ altıgeninde $EF \parallel MN$.
Paralellik geçişli olduğundan

$$BC \parallel EF.$$

Kalan durumda Şekil 30'daki gibi $ABOC$ bir paralelkenardır. Bu durumda OB 'de öyle bir E' vardır ki $FE' \parallel CB$. İlk durumdan $DE' \parallel AB$, dolayısıyla E' noktası zaten E 'dir.



Şekil 29.: Hessenberg'in kanıtı



Şekil 30.: Hessenberg'in kanıtının özel durumu

Kaynakça

- [1] Archimedes. *The Two Books On the Sphere and the Cylinder*, volume I of *The Works of Archimedes*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. Translated into English, together with Eutocius' commentaries, with commentary, and critical edition of the diagrams, by Reviel Netz.
- [2] Mustafa Kemal Atatürk. *Geometri*. Türk Dil Kurumu, Ankara, 2000. 4. baskı (1. baskı 1971).
- [3] Güler Çelgin. *Eski Yunanca–Türkçe Sözlük*. Kabalcı, İstanbul, 2011.
- [4] Richard Dedekind. *Essays on the Theory of Numbers. I: Continuity and Irrational Numbers. II: The Nature and Meaning of Numbers*. Dover Publications, New York, 1963. Authorized 1901 translation by Wooster Woodruff Beman of “Stetigkeit und irrationale Zahlen” and “Was sind und was sollen die Zahlen” (second edition, 1893; first, 1887).
- [5] Abdurrahman Demirtaş. *Matematik Sözlüğü*. Bilim Teknik Kültür Yayınları, Ankara, 1986.
- [6] Girard Desargues. *Oeuvres de Desargues réunies et analysées par M. Poudra*, volume 1. Leiber, Paris, 1864. gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k993793, accessed January 8, 2020.

- [7] Girard Desargues. Desargues on perspective triangles. In Smith [22], pages 307–10. Translated by Lao G. Simons from [6, pp. 399, 413–5, 430–3].
- [8] René Descartes. *The Geometry of René Descartes*. Dover Publications, New York, 1954. Translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham, with a facsimile of the first edition of 1637.
- [9] Euclid. *The Thirteen Books of Euclid’s Elements*. Dover Publications, New York, 1956. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by Thomas L. Heath. In three volumes. Republication of the second edition of 1925. First edition 1908.
- [10] Euclid. *Öklid’in Öğeler’inin 13 Kitabından Birinci Kitap*. Mathematics Department, Mimar Sinan Fine Arts University, Istanbul, 4th edition, September 2014. The first of the 13 books of Euclid’s Elements. Greek text, with Turkish version by Özer Öztürk & David Pierce.
- [11] Thomas Heath. *A History of Greek Mathematics. Vol. I. From Thales to Euclid*. Dover Publications, New York, 1981. Corrected reprint of the 1921 original.
- [12] Thomas Heath. *A History of Greek Mathematics. Vol. II. From Aristarchus to Diophantus*. Dover Publications, New York, 1981. Corrected reprint of the 1921 original.
- [13] Gerhard Hessenberg. Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen. *Math. Ann.*, 61(2):161–172, June 1905.

- [14] David Hilbert. *Foundations of Geometry*. Open Court, La Salle, Illinois, 1971. Second English edition, translated by Leo Unger from the Tenth German edition, revised and enlarged by Paul Bernays.
- [15] Morris Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, New York, 1972.
- [16] Henry George Liddell and Robert Scott. *A Greek-English Lexicon*. Clarendon Press, Oxford, 1996. “Revised and augmented throughout by Sir Henry Stuart Jones, with the assistance of Roderick McKenzie and with the cooperation of many scholars. With a revised supplement.” First edition 1843; ninth edition 1940.
- [17] James Morwood and John Taylor, editors. *Pocket Oxford Classical Greek Dictionary*. Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [18] Pappus of Alexandria. *Pappus Alexandrini Collectionis Quae Supersunt*, volume II. Weidmann, Berlin, 1877. E libris manu scriptis edidit, Latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch. Insunt librorum VI et VII reliquiae.
- [19] Pappus of Alexandria. *Book 7 of the Collection. Part 1. Introduction, Text, and Translation*. Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer Science+Business Media, New York, 1986. Edited With Translation and Commentary by Alexander Jones.
- [20] David Pierce. Thales and the nine-point conic. *The De Morgan Gazette*, 8(4):27–78, 2016. education.lms.ac.uk/2016/12/thales-and-the-nine-point-conic/,

accessed June 1, 2017; demorgangazette.files.wordpress.com/2021/02/0a415-dmg_8_no_3_pierce_25dec16-1.pdf, accessed March 13, 2022.

- [21] Proclus. *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton Paperbacks. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992. Translated from the Greek and with an introduction and notes by Glenn R. Morrow. Reprint of the 1970 edition. With a foreword by Ian Mueller.
- [22] David Eugene Smith. *A Source Book in Mathematics*. 2 vols. Dover Publications, New York, 1959. Unabridged republication of the first edition, 1929, published by McGraw-Hill.
- [23] Herbert Weir Smyth. *Greek Grammar*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1980. Revised by Gordon M. Messing, 1956. Eleventh Printing. Original edition, 1920.
- [24] D. J. Struik, editor. *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*. Princeton Paperbacks. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986. Reprint of the 1969 edition.
- [25] Rene Taton. L' « Essay pour les Coniques » de Pascal. *Revue d'histoire de science et de leurs applications*, 8(1):1–18, 1955. www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0048-7996_1955_num_8_1_3488.
- [26] Ivor Thomas, editor. *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics. Vol. I. From Thales to Euclid*. Number 335 in Loeb Classical Library. Harvard University

Press, Cambridge, Mass., 1951. With an English translation by the editor. Supplemented reprint 1980.

- [27] Ivor Thomas, editor. *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics. Vol. II. From Aristarchus to Pappus*. Number 362 in Loeb Classical Library. Harvard University Press, Cambridge, Mass, 1951. With an English translation by the editor.
- [28] Arthur W. Weeks and Jackson B. Adkins. *A Course in Geometry: Plane and Solid*. Ginn and Company, Lexington MA, 1970.

yazar	eserinin adı	Yunancası	İngilizcesi	*
Öklid	<i>Verier</i>	Δεδωμένα	<i>Data</i>	1
Apollonius	<i>Oramm Kesilmesii</i>	Λόγου ἀπτοτομή	<i>Cutting-off of a Ratio</i>	2
Apollonius	<i>Alamm Kesilmesii</i>	Χωρίου ἀπτοτομή	<i>Cutting-off of an Area</i>	2
Apollonius	<i>Belirli Kesit</i>	Διωρισμένης τομῆ	<i>Determinate Section</i>	2
Apollonius	<i>Teğetler</i>	Ἑταφαί	<i>Tangencies</i>	2
Öklid	<i>Porizmalar</i>	Πορίσματα	<i>Porisms</i>	3
Apollonius	<i>Yönelmeler</i>	Νεύσεις	<i>Vergings</i>	2
Apollonius	<i>Düzlem Yerleri</i>	Τόποι ἐπιπέδοι	<i>Plane Loci</i>	2
Apollonius	<i>Koni Kesitleri</i>	Κωνικαί	<i>Conics</i>	8
Aristaeus	<i>Cisim Yerleri</i>	Τόποι στερεοί	<i>Solid Loci</i>	5
Öklid	<i>Yüzey Yerleri</i>	Τόποι τῶν πρὸς ἐπιφανείᾳ	<i>Surface Loci</i>	2
Eratosthenes	<i>Ortalar hakkında</i>	Περὶ μεσοτήτων	<i>On Means</i>	2

Analiz Hazinesi'nin içindekiler. (*Eserin kitap [cilt] sayısı)